世界で一番分かりやすい

Hayden-Preskill入門

Hayden-Preskill プロトコル

[Patrick Hayden & John Preskill, 2007]

量子情報理論

"ランダム符号化"を理解するためのよい教育的玩具模型。

ブラックホールの情報パラドクス

量子カオス?

スクランブリング?

ブラックホールの量子誤り訂正的性質を調べるためのqubit玩具模型

目標：Hayden-Preskill プロトコルを直観で理解する。

目次

1. 量子論の復習
2. Hayden-Preskill 1：直観的理解
3. Hayden-Preskill 2：厳密な証明（の方針）
4. Hayden-Preskill 3：応用
5. ハミルトニアン系におけるHayden-Preskill

参考文献：Hayden & Preskill, JHEP 2007 (9):120.

Nakata, Wakakuwa & Koashi, Quantum 7, 928 (2023).

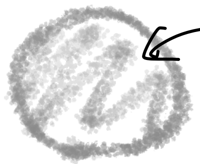
Nakata & Tezuka, Phys. Rev. Res. 6, L022021 (2024).

量子情報理論，朝倉書店.

1. 量子論の復習

量子状態・時間発展・量子測定

1-1. 量子状態



物理系A $\iff$ ヒルベルト空間 $\mathcal{H}^A$

本講義では $d_A := \dim \mathcal{H}^A < \infty$ とする。

- 量子純粋状態 $|\psi\rangle$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{H}^A$ のユニットベクトル ($|\langle\psi|\psi\rangle| = 1$)

例) 波動関数 : $i\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle$.

Qubit上の状態 : $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$).

- 量子系を記述するためには純粋状態だけでは不足。

密度行列 ρ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\rho \in B(\mathcal{H})$ s.t. $\rho \geq 0$ & $\mathrm{Tr}[\rho] = 1$.

$$\left\{\begin{array}{l} \rho : \text{Hermite行列} \\ \& \\ \text{全ての固有値が非負} \end{array}\right. \iff \forall |v\rangle,\ \langle v|\rho|v\rangle \geq 0.$$

例1.)

$\{p_j, |\varphi_j\rangle\}_j$

量子系A

"確率 p_j で $|\varphi_j\rangle$ を準備する" = アンサンブル

→ この系Aは $\rho = \sum_j p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$ で記述される。

Remark 1. 密度行列は、"純粋状態集合上の確率分布" を定めるもの(と解釈できる)

Remark 2. $|\varphi_j\rangle$ は直交しているとは限らない。

Remark 3 二つの異なるアンサンブル $\{p_j, |\varphi_j\rangle\}_j$ と $\{q_\alpha, |\psi_\alpha\rangle\}_\alpha$ が

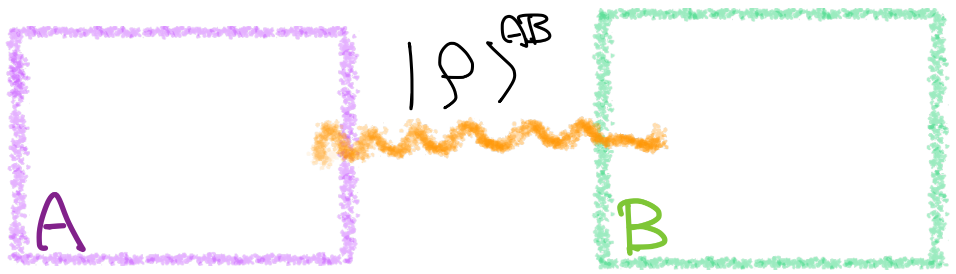
$$\sum_j p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| = \sum_\alpha q_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| .$$

を満たすとき、二つのアンサンブルを見分ける物理的な方法は存在しない。

→ prob. 1/2 で $|0\rangle$ or $|1\rangle$, prob. 1/4 で $|0\rangle$ or $|1\rangle$ or $|+\rangle$

" $|+\rangle$ などは物理的に全て同じ。

例2)



系ABの純粋状態 $|\rho\rangle^{AB}$ の部分系Aだけを見ると、

$$\rho^A := \mathrm{Tr}_B\left[|\rho\rangle\langle\rho|^{AB}\right]$$

部分トレース
(Partial trace)

$$= \sum_j \left(I^A \otimes \langle f_j|^B\right) |\rho\rangle\langle\rho|^{AB} \left(I^A \otimes |f_j\rangle^B\right)$$

という密度行列で記述される。

任意の基底.

- 純粋化 (purification)：部分トレースの"逆操作".

$\forall \rho^A$, $\exists B$ & $|\rho\rangle^{AB}$ s.t. $\mathrm{Tr}_B[\,|\rho\rangle\langle\rho|^{AB}\,] = \rho^A$.

どうやって見つけるか？

$$\underbrace{\rho^A = \sum_j p_j |j\rangle\langle j|^A}_{\text{対角化}} \Longrightarrow |\rho\rangle^{AA'} = \sum_j \sqrt{p_j}\, |j\rangle^A \otimes |j\rangle^{A'}.$$

この場合、$B = A'$ ($\Leftrightarrow \dim \mathcal{H}^B = \dim \mathcal{H}^{A'}$)

<u>Remark</u>：純粋化は唯一ではない.

上の例で、$|\rho'\rangle^{AA'} = \sum_j \sqrt{p_j}\, |j\rangle^A \otimes |e_j\rangle^{A'}$ としても、$\rho'^A = \rho^A$.

($|e_j\rangle$：任意の基底.)

より重要な例として、$V^{A'\to B}$ を A' から B へのアイソメトリとして.
($d_A \le d_B$)

$$|\rho''\rangle^{AB} = (I^A \otimes V^{A'\to B})\,|\rho\rangle^{AA'}$$

を考えると、 $\rho''^A = \rho^A$.

アイソメトリ？

$V^{A\to B}$: $d_B \times d_A$ 行列で、 $(V^{A\to B})^\dagger V^{A\to B} = I^A$ をみたすもの。

$(d_A \le d_B)$

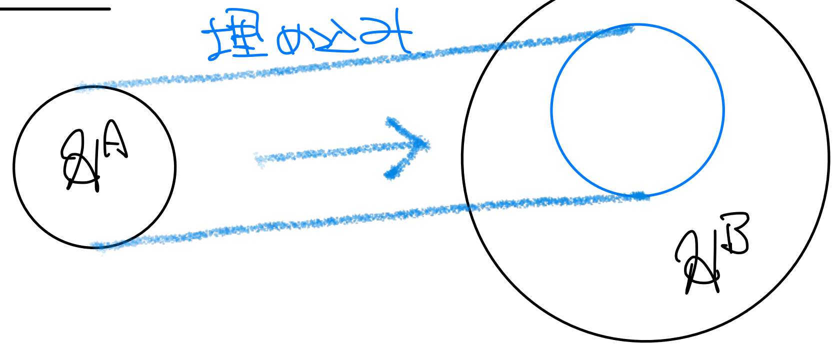
適切な基底。

行列

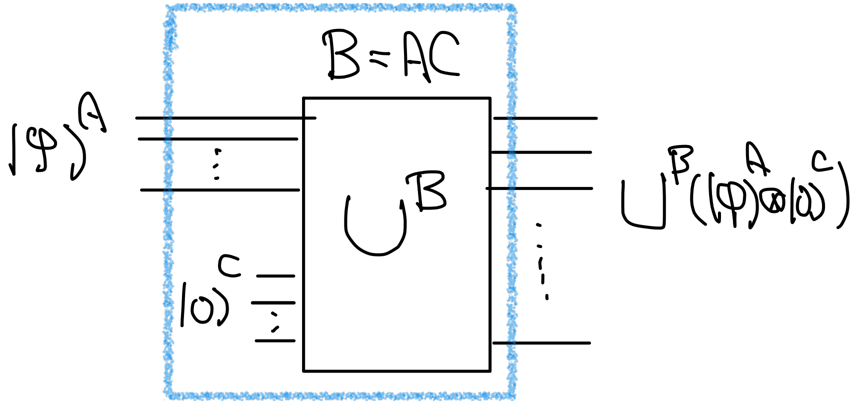
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \end{pmatrix}}_{d_A} \Bigg\} d_B$$

たて長の行列。

直観



$$V^{A\to B} = U^B(I^A \otimes |0\rangle^C).$$



確認:

$$\mathrm{Tr}_B\left[|\rho''\rangle\langle\rho''|^{AB}\right] = \mathrm{Tr}_B\left[(I^A\otimes V^{A'\to B})|\rho\rangle\langle\rho|^{AA'}(I^A\otimes V^{A'\to B})^\dagger\right]$$

$$= \mathrm{Tr}_B\left[(I^A\otimes \underbrace{V^{A'\to B})^\dagger(I^A\otimes V^{A'\to B}}_{I^{A'}})|\rho\rangle\langle\rho|^{AA'}\right]$$

$I^{A'}$ ∵ アイソメトリ

$$= \mathrm{Tr}_{A'}\left[|\rho\rangle\langle\rho|^{AA'}\right]$$

$$= \rho^A$$

よって、 $|\rho''\rangle^{AB} = (I^A\otimes V^{A'\to B})|\rho\rangle^{AA'}$ は ρ^A の純粋化。

純粋化の自由度

$|\rho_1\rangle^{AB}$ と $|\rho_2\rangle^{AC}$ が ρ^A の純粋化だとすると、アイソメトリ $V^{B\to C}$ $(d_B \leq d_C)$ が存在して、

$$|\rho_2\rangle^{AC} = (I^A\otimes V^{B\to C})|\rho_1\rangle^{AB}$$

とかける。

[証明は容易]

Remark 2　二つの異なるアンサンブル $\{p_j, |\varphi_j\rangle\}_{j=1,\dots,J}$ と $\{q_\alpha, |\psi_\alpha\rangle\}_{\alpha=1,\dots,K}$ が同じ密度行列をもつとする。つまり、

$$\sum_{j=1}^{J} p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| = \sum_{\alpha=1}^{K} q_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| .$$

このとき、二つのアンサンブルを見分ける物理的な方法は存在しない。

↳ これは純粋化の自由度を用いて示せる。

Proof)　$J \leq K$ とする。

K 次元系 B と、その系の基底 $\{|b_\alpha\rangle\}_{\alpha=1,\dots,K}$ を用いて

$$|\Psi\rangle^{AB} := \sum_{\alpha=1}^{K} \sqrt{q_\alpha}\, |\psi_\alpha\rangle^{A} \otimes |b_\alpha\rangle^{B}$$

とすると、この状態の B を $\{|b_\alpha\rangle\}_{\alpha=1,\dots,K}$ で測定すれば、系 A に $\{q_\alpha, |\psi_\alpha\rangle\}_{\alpha=1,\dots,K}$ が実現する。

一方で、J次元系Cと 〜 〃 $\{|c_j\rangle\}_{j=1\dots J}$

$$|\Phi\rangle^{AC} := \sum_{j=1}^{J} \sqrt{p_j}\,|\varphi_j\rangle^A \otimes |c_j\rangle^C$$

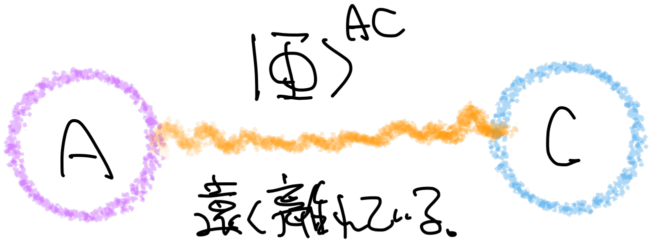
とすると、Cを測れば Aに $\{p_j, |\varphi_j\rangle\}_{j=1,\dots,J}$ が実現。

仮定より、$\Psi^A = \sum_{\alpha=1}^{K} q_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|^A = \sum_{j=1}^{J} p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| = \Phi^A$.

よって、アイソメトリ $V^{C\to B}$ が存在して、

$$|\Psi\rangle^{AB} = (I^A \otimes V^{C\to B})\,|\Phi\rangle^{AC}.$$

以下の状況を考える。



case 1. ⟶ C を $\{|C_j\rangle\}_{j=1,\dots,J}$ で測る。

$\Longrightarrow$ A に $\{p_j, |\varphi_j\rangle\}_{j=1,\dots,J}$ が実現。

case 2. ⟶ C にアイソメトリ $V^{C\to B}$ を作用してから、$\{|b_\alpha\rangle\}_{\alpha=1,\dots,K}$ で測る。

$\Longrightarrow$ A に $\{q_\alpha, |\psi_\alpha\rangle\}_{\alpha=1,\dots,K}$ が実現。

もし、$\{p_j, |\varphi_j\rangle\}_{j=1,\dots,J}$ と $\{q_\alpha, |\psi_\alpha\rangle\}_{\alpha=1,\dots,K}$ を見分けられたら、

C でアイソメトリ $V^{C\to B}$ をかけたかどうかを A で check できる。

光速を超えた通信が可能になる。 Contradiction!!

$\blacksquare$

- Schmidt分解.

$$|\rho\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{d_A} \sum_{\alpha=1}^{d_B} C_{j\alpha} \, |e_j\rangle^A \otimes |f_\alpha\rangle^B$$

(ρに依存する)よい基底
$\{|\varphi_j\rangle^A\}_j, \ \{|\psi_j\rangle^B\}_j$

$$= \sum_{j=1}^{\min\{d_A, d_B\}} \sqrt{P_j} \, |\varphi_j\rangle^A \otimes |\psi_j\rangle^B$$

P_j: 確率分布.

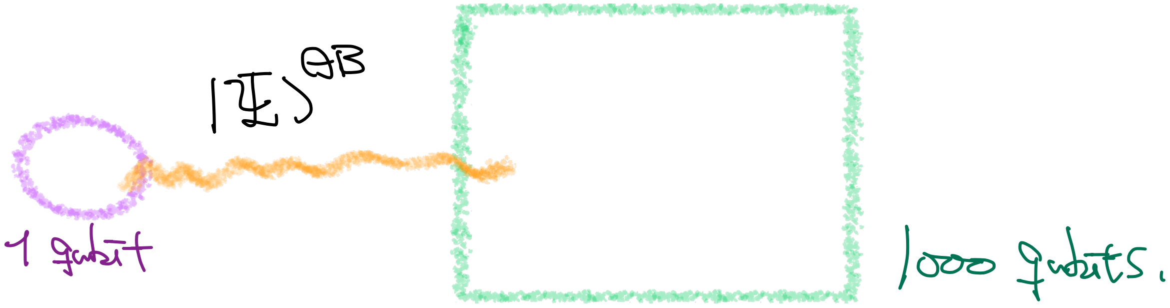
Tr_B $\swarrow$ $\qquad$ $\searrow$ Tr_A

$$\rho^A = \sum_{j=1}^{\min\{d_A, d_B\}} P_j \, |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|^A$$

$$\rho^B = \sum_{j=1}^{\min\{d_A, d_B\}} P_j \, |\psi_j\rangle\langle\psi_j|^B.$$

1. 同じ固有値.
2. $\mathrm{rank}\,\rho^A = \mathrm{rank}\,\rho^B = \min\{d_A, d_B\}$.

例1).



$$\forall\ |\Psi\rangle^{AB} = \sqrt{p}\ |e_0\rangle^A \otimes |\varphi_0\rangle^B + \sqrt{1-p}\ |e_1\rangle^A \otimes |\varphi_1\rangle^B .$$

から、 $\operatorname{rank} \Psi^B \le 2$.

$$\Longleftrightarrow \quad \Psi^B = 2^{1000}\left(\begin{array}{cc|ccc} p & 0 & & & \\ 0 & 1-p & & & \\ \hline & & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 0 \end{array}\right)$$

2^{1000}

1-2. 時間発展

$$\rho(t=0) \Rightarrow \rho(t=T)$$

例) Schrödinger方程式: $i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle$

Lindblad方程式: $\dot{\rho} = -i[\hat{H},\rho] + \sum_j \gamma_j \left(L_j \rho L_j^\dagger - \frac{1}{2}\{L_j^\dagger L_j, \rho\}\right)$

最も一般的な形で量子系の時間発展を記述する方法?

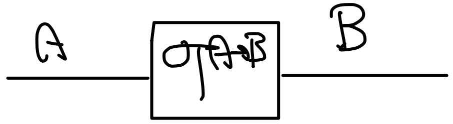
☆写像: 状態を状態に写すことが必要.

$$\rho^A \xrightarrow{\ A\ } \boxed{\mathcal{T}^{A\to B}} \xrightarrow{\ B\ } \mathcal{T}^{A\to B}(\rho^A)$$

☆ ⟺ Completely-Positive Trace-Preserving 写像 (CPTP map).

$$\mathrm{Tr}[\mathcal{T}(X)] = \mathrm{Tr}[X], \quad {}^\forall \text{op. } X.$$

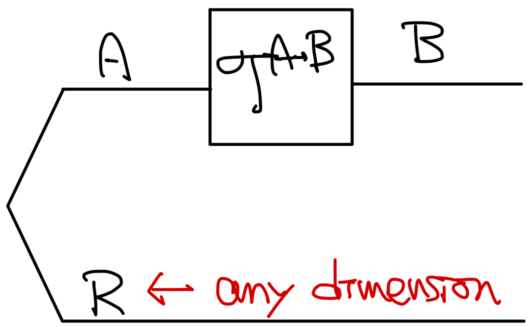
Positive 写像



$\forall \rho^A \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma^{A\to B}(\rho^A) \geq 0$

⇜ 当然✪のために必要だが、この条件だけでは不十分。

Completely-Positive 写像



$\forall \rho^{AR} \geq 0 \quad \Big\} \; (\sigma^{A\to B} \otimes \mathrm{id}^R)(\rho^{AR}) \geq 0$

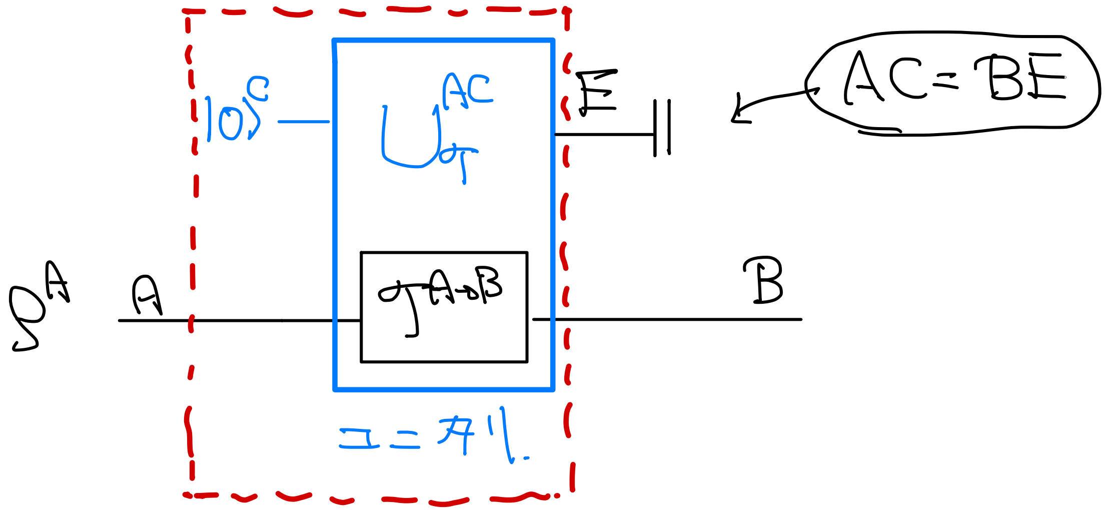
CPTP写像 ⇔ 状態は必ず状態に写る。

⇔ 任意のCPTP写像は、量子論の枠組みで実現可能か？

A. Yes.

- Stinespring 拡張 (Stinespring dilation)

↑任意のCPTP写像は、ユニタリと部分トレースで書ける。



$U_{\mathcal{T}}^{AC}(I^A \otimes |0\rangle^C) =: V_{\mathcal{T}}^{A\to BE}$: アイソメトリ.

$^\forall$CPTP map $\mathcal{T}^{A\to B}$, $\exists V_{\mathcal{T}}^{A\to BE}$: アイソメトリ s.t.

$$\mathcal{T}^{A\to B}(\cdot) = \mathrm{Tr}_E\left[V_{\mathcal{T}}^{A\to BE}(\cdot)\left(V_{\mathcal{T}}^{A\to BE}\right)^\dagger\right].$$

物理的な意味

CPTP mapを実装する代わりに、適切な拡張系にユニタリを作用して、不必要な系をトレースアウトしてもよい。

↳物理系で実現可能。

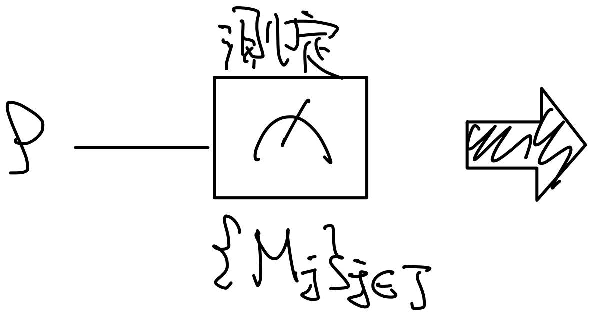
結論

CPTP写像 ⟺ 状態は必ず状態に写る。

⟺ 量子系で実現できる全ての時間発展。

1-3. 量子測定

測定 = 量子系から古典情報を取り出す操作.



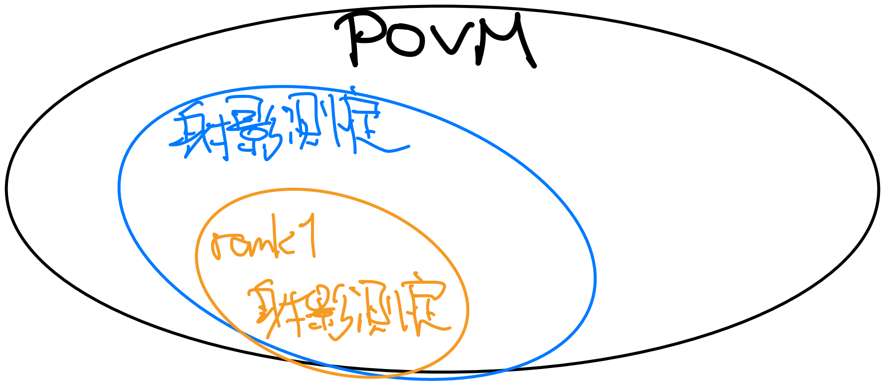
確率 $p_j = \mathrm{Tr}[M_j \rho]$ で出力 j を得る.

POVM : Positive-Operator-Valued Measure

$$\text{POVM } \{M_j\}_{j\in J} \Longleftrightarrow M_j \geq 0 \ \& \ \sum_{j\in J} M_j = I.$$

Remark 1.

POVMの特殊ケースとして、様々な測定がある.



射影測定 PVM : 全てのM_jが射影演算子.

rank-1 PVM : 全てのM_jがrank-1の

$\Leftrightarrow \{|e_j\rangle\langle e_j|\}_j$: 基底.

Remark 2

初歩の量子論："可観測量 O を測る"

$\iff$ 期待値は $\mathrm{Tr}[O\rho]$.

これはPVMの帰結.

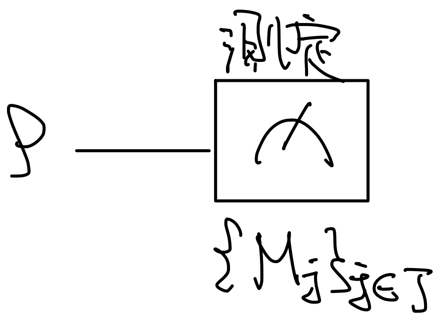
$$O = \sum_j o_j \underbrace{P_j}_{\text{射影}} \implies \{P_j\}_j \text{ で測ると、} j \text{ を確率 } \mathrm{Tr}[P_j \rho] \text{ で得る。}$$

$$\implies \text{期待値：} \sum_j o_j \mathrm{Tr}[P_j \rho]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\left(\sum_j o_j P_j\right) \rho\right]$$

$$= \mathrm{Tr}[O \rho].$$

Remark 3.



$\Longrightarrow$ 確率 $p_j = \mathrm{Tr}[M_j \rho]$ で出力 j を得る。

$$\text{状態} \xmapsto{\text{POVM}} \text{確率分布}.$$

↪ 測定後の状態を記述したいときは、POVMでは不足。

量子インストゥルメント $\{\mathcal{C}_j\}_j$.

$$\begin{cases} \bullet \ \forall j,\ \mathcal{C}_j : \text{CP trace-non-increasing map} \\ \bullet \ \sum_j \mathcal{C}_j = \mathrm{id} \end{cases}$$

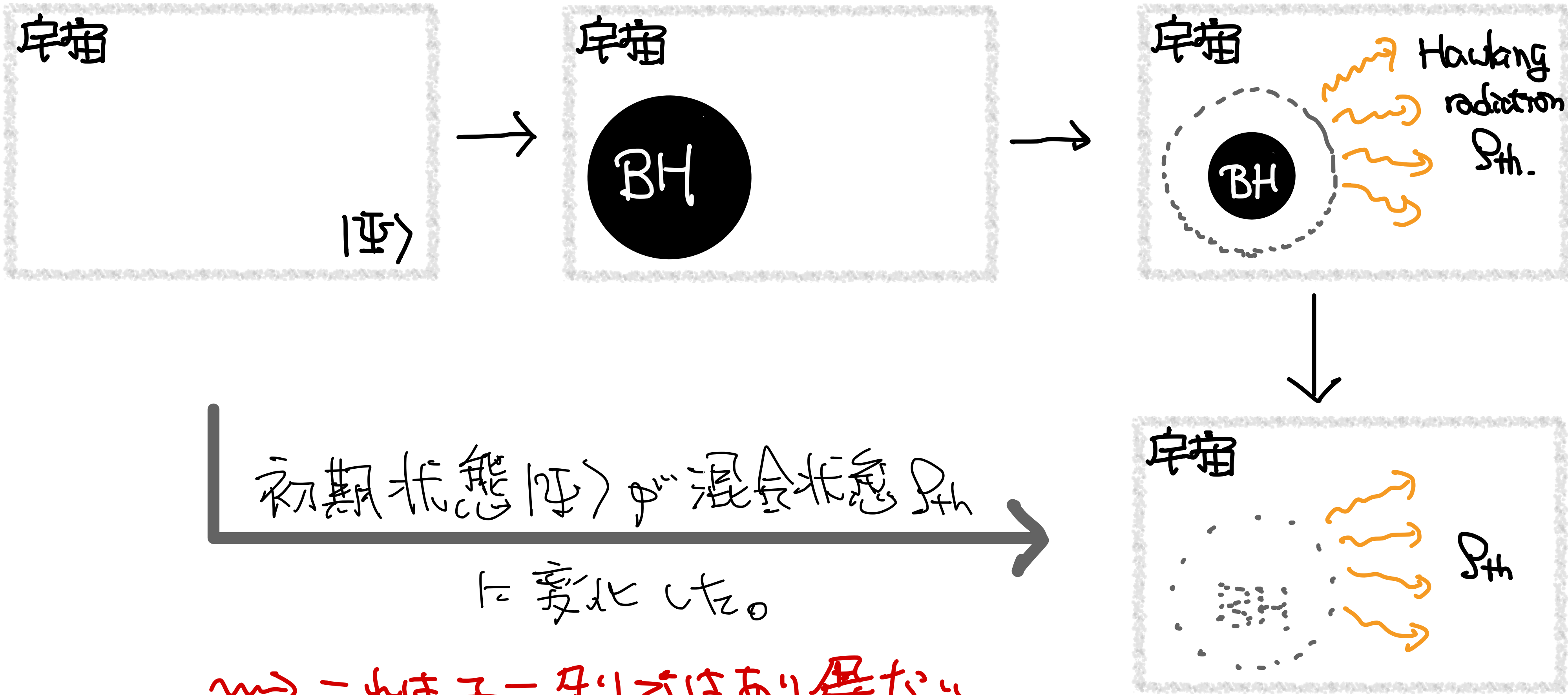
$\rho \xmapsto[\text{メント}]{\text{インストゥル}}$ 確率 $p_j = \mathrm{Tr}[\mathcal{C}_j(\rho)]$ で j と測定後状態 $\dfrac{\mathcal{C}_j(\rho)}{p_j}$ を出力。

2. Hayden-Preskill：直観

2-1. Hayden-Preskill とは？

- ブラックホールの情報パラドクスを oversimplify した模型.
- 量子誤り訂正を oversimplify した模型.

● ブラックホールの情報パラドクス



初期状態 $|\Psi\rangle$ が混合状態 ρ_{th} に変化した。

⇝ これはユニタリではあり得ない。

(僕には分からない何らかの理由で)、多くの人は宇宙の時間発展はユニタリだと信じている。

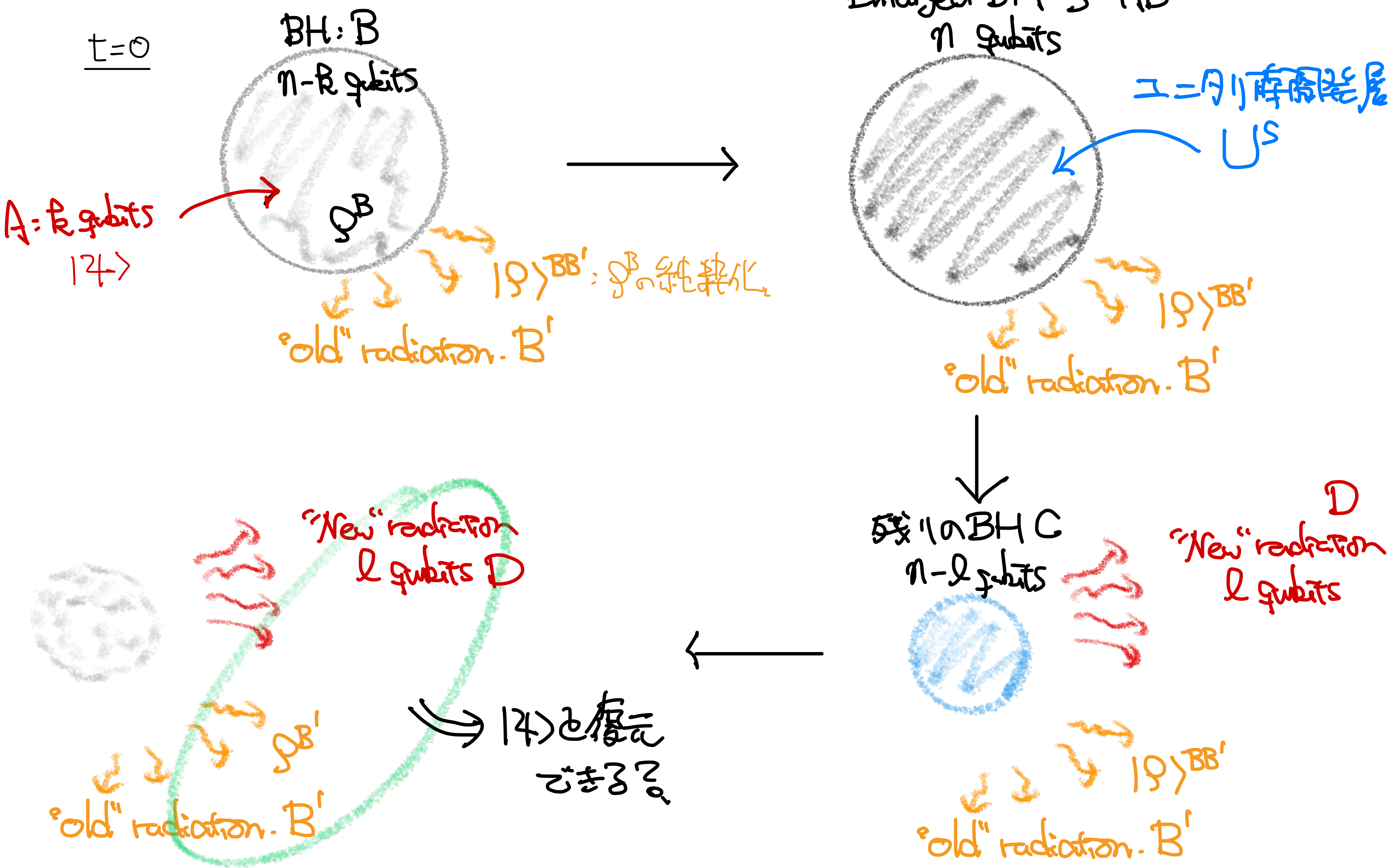
仮定:宇宙はユニタリ時間発展.

$\Longrightarrow$ Hawking放射が熱的(ρ_{thermal})であるように"見える"が、
本当は熱的ではないはず。

$\Longrightarrow$ Hawking放射から $|\Psi\rangle$ を復元する方法があるはず。

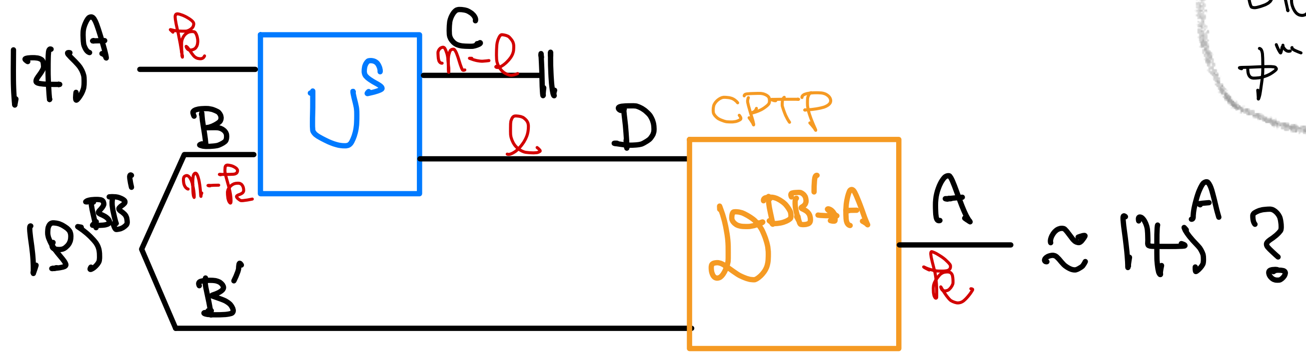
$\rightsquigarrow$ Hayden-Preskill protocol はこの方法を考える toy model.

• HP プロトコル



t=0
BH: B
n-k qubits
A: k qubits
|ψ⟩
ρ^B
|ρ⟩^{BB'}: ρ^Bの純粋化
"old" radiation. B'
Enlarged BH S=AB
n qubits
ユニタリ時間発展
U^S
|ρ⟩^{BB'}
"old" radiation. B'
残りのBH C
n-l qubits
D
"New" radiation
l qubits
|ρ⟩^{BB'}
"old" radiation. B'
"New" radiation
l qubits D
ρ^{B'}
"old" radiation. B'
|ψ⟩を復元できる?

HP プロトコルのダイアグラム



全く重力が入ってないが、しばしば"Gauge/Gravity対応"があるから、Q. mechで十分"と説明される。

仮定1. U^Sや$|\rho\rangle^{BB'}$の詳細は知っている。

$\Leftrightarrow$ DはUや$|\rho\rangle$に依存してもよい。

$\rightsquigarrow$ もし、$n=l$であれば、$U^{S\dagger}$を作用させれば$|\psi\rangle^A$の$|\rho\rangle^{BB'}$を得る。

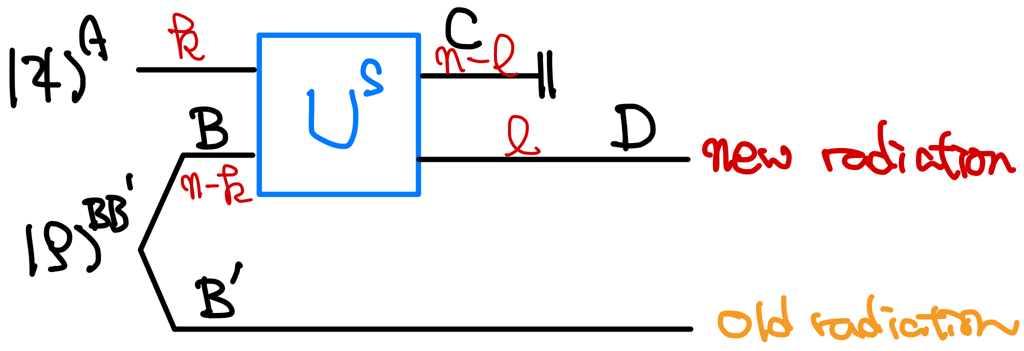
問. $|\psi\rangle^A$の復元に成功するためには、lがどれくらい大きければよいのか？

仮定2. U^S は Haar ランダム・ユニタリ (or その近似)

← これは後々、e^{-iHt} に置き換えるが、

基本的に本講義の全てで Haar を仮定する。

2-2. 脱線：HPプロトコルと熱平衡化.

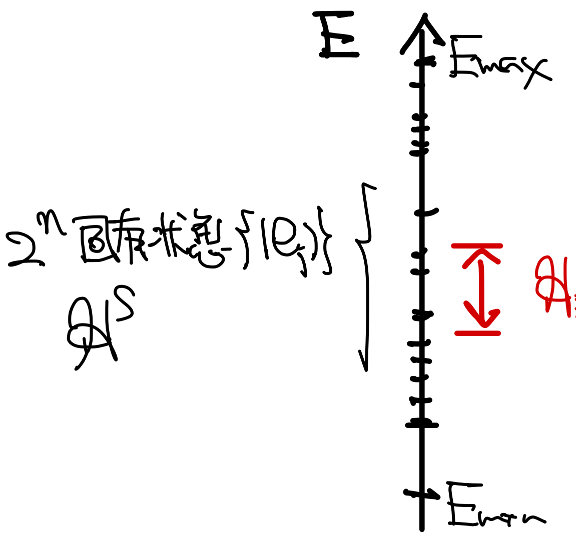


← これは熱的なのか?

Ans. U^Sが"エネルギーを保存するHaarランダム" ①

かつ ℓが"十分小さい" ② ならば、Yes.

エネルギースペクトル in S : $H^S = \sum_j E_j |e_j\rangle\langle e_j|$



$\mathcal{H}_E^S := \mathrm{span}\{|e_j\rangle : E-\delta E \le E_j \le E\}$, 次元 $1 \ll d_E \ll d_S$

① 仮定：・ $|\Psi\times\Psi|^{A}\otimes\rho^{B}\in\mathcal{H}_E^S$ 上の状態。

・ S のユニタリは、$\mathcal{H}_E^S$ 上の Haar ランダム U_E^S。

（≈ エネルギーをあまり混ぜない）。

もし、

② $$\ell \ll \frac{1}{2}\left(\log d_E - H(B)_\rho\right)$$

ならば、new と old radiation の状態 σ は、

$$\sigma^{DB'} \approx \xi^D_{\mathrm{thermal}} \otimes \rho^{B'}$$

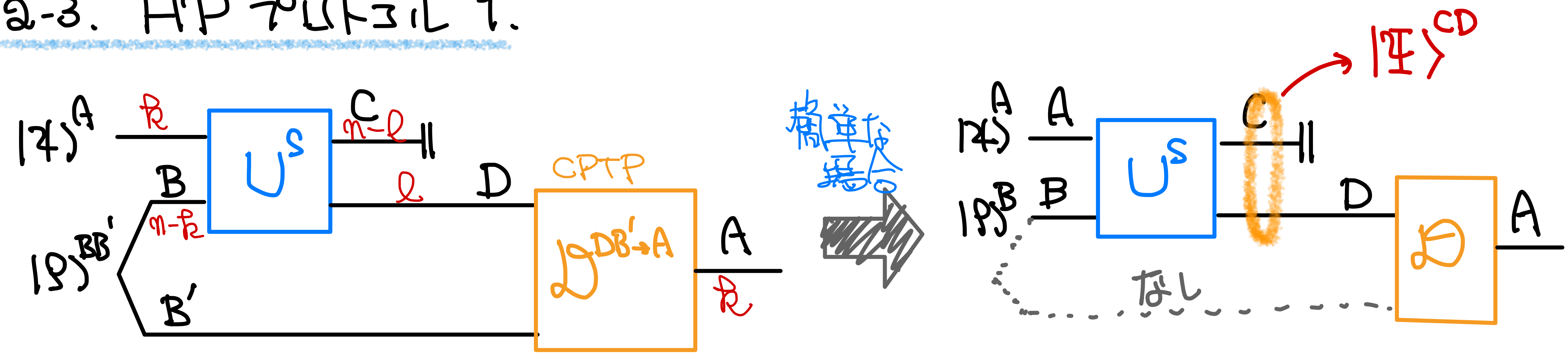
$\Downarrow$

つまり、new radiation D は熱的で、

old radiation B' とは何の相関も持たない。

"Hawking 放射が"熱的"という結果と（仮定付きで）整合。

2-3. HPプロトコル1.



しばらく、$|\Psi\rangle^{CD} = U^S(|\psi\rangle^A \otimes |\rho\rangle^B)$ がどういう状態かを考える。

<u>Step1.</u> C-D間のエンタングルメント？

<u>Step2</u> Ψ^C or Ψ^D がどういう状態か？

<u>Step3.</u> Ψ^D から $|\psi\rangle^A$ を復元できるか？

Step1. $|\Psi\rangle^{CD} = U^S(|\psi\rangle^A \otimes |\rho\rangle^B)$ のエンタングルメント?

エンタングルメント・エントロピー.

- $d_C \le d_D$ の場合を考える.

$$H(C)_\Psi := -\mathrm{Tr}[\Psi^C \log \Psi^C].$$

$0 \le H(C)_\Psi \le \log d_C$

$|\Psi\rangle^{CD}$: プロダクト　　$|\Psi\rangle^{CD}$: 最大エンタングルメント.

Haar平均

$$\mathbb{E}_U[H(C)_\Psi] = -\mathbb{E}_U[\mathrm{Tr}[\Psi^C \log \Psi^C]].$$

トリック1. $H(C)_\Psi \ge H_2(C)_\Psi := -\log \mathrm{Tr}[(\Psi^C)^2]$

トリック2. $\ln x \le x - 1$

トリック3. スワップ・トリック　(≈レプリカ・トリック)

$$\mathrm{Tr}[M^A N^A] = \mathrm{Tr}[(M^A \otimes N^{A'}) \mathbb{F}^{AA'}]$$

ここで、$\mathbb{F}^{AA'} = \sum_{i,j=1}^{d_A} |e_i\rangle\langle e_j|^A \otimes |e_j\rangle\langle e_i|^{A'}$: basis-independent.

トリック4. もし、$\Theta^{AA'}$が全てのユニタリU^Aに対して

$$[\Theta^{AA'}, U^A\otimes U^{A'}] = 0$$

を満たすならば、$\Theta^{AA'} = \alpha I^A\otimes I^{A'} + \beta F^{AA'}$ と書ける。

また、αとβは、

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}[\Theta^{AA'}] = \alpha d_A^2 + \beta d_A \\ \mathrm{Tr}[\Theta^{AA'}F^{AA'}] = \alpha d_A + \beta d_A^2 \end{cases}$$

を解くことで求められる。

さて、

$$\mathbb{E}_U[H(C)_\Psi] \geq \mathbb{E}_U[H_2(C)_\Psi]$$
$$= \mathbb{E}_U[\underbrace{-\log[\mathrm{Tr}[(\Psi^C)^2]]}_{0\leq \quad \leq \log d_C}]$$

$$\log d_C - H_2(C)_\Psi = \log[d_C \times \mathrm{Tr}[(\Psi^C)^2]]$$

$$\leq \frac{1}{\ln 2}\left(d_C \operatorname{Tr}[(\Psi^C)^2] - 1 \right).$$

↳ $\mathbb{E}_U[\operatorname{Tr}[(\Psi^C)^2]]$ が分かれば十分。

$$\mathbb{E}_U[\operatorname{Tr}[(\Psi^C)^2]] = \mathbb{E}_U\left[\operatorname{Tr}\left[(\Psi^C \otimes \Psi^{C'}) \mathbb{F}^{CC'} \right] \right]$$

$$= \operatorname{Tr}_D[\,|\Psi\rangle\langle\Psi|^{CD}\,]$$

$$= \operatorname{Tr}_D\left[U^S (|\psi\rangle\langle\psi|^A \otimes |\varphi\rangle\langle\varphi|^B) U^{S\dagger} \right]$$

$$= \mathbb{E}_U\left[\operatorname{Tr}\left[\underbrace{\left(U^S (|\psi\rangle\langle\psi|^A \otimes |\varphi\rangle\langle\varphi|^B) U^{S\dagger}\right)^{\otimes 2}}_{= X^{SS'}} \left(\mathbb{F}^{CC'} \otimes \mathbb{I}^{DD'} \right) \right] \right]$$

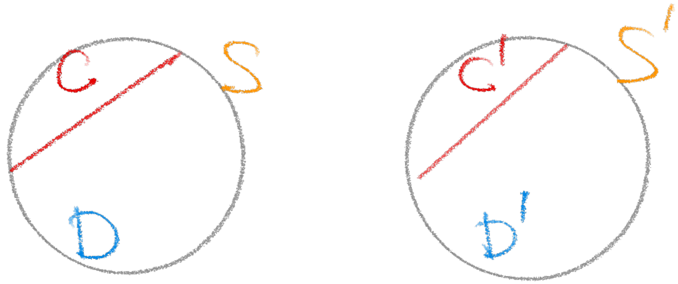
↳ Haarのおかげで $[X^{SS'}, U^{S\otimes 2}] = 0$
($\forall$ユニタリ U^S)

$$\Leftrightarrow X^{SS'} = \alpha \mathbb{I}^{SS'} + \beta \mathbb{F}^{SS'}$$

$$= \frac{\mathbb{I}^{SS'} + \mathbb{F}^{SS'}}{d_S(d_S+1)}$$

$$= \frac{1}{d_S(d_S+1)} \mathrm{Tr}\left[\left(\mathbb{I}^{SS'} + \mathbb{F}^{SS'} \right) \left(\mathbb{F}^{CC'} \otimes \mathbb{I}^{DD'} \right) \right]$$

ここで、$S=CD$なので、$\mathbb{F}^{SS'} = \mathbb{F}^{CC'} \otimes \mathbb{F}^{DD'}$



$$= \frac{1}{d_S(d_S+1)} \left(\underbrace{\mathrm{Tr}\left[\mathbb{F}^{CC'} \otimes \mathbb{I}^{DD'} \right]}_{= d_C \times d_D^2 = d_S d_D} + \underbrace{\mathrm{Tr}\left[\mathbb{I}^{CC'} \otimes \mathbb{F}^{DD'} \right]}_{= d_S d_C} \right)$$

$$= \frac{d_C + d_D}{d_S + 1}$$

ということで、全部合わせると、

$$\underbrace{\mathbb{E}_U\left[H(C)_\Psi \right]}_{\simeq \log d_C} \geq \log d_C - \frac{1}{\ln 2} \frac{d_C^2 - 1}{d_S + 1} > \underbrace{\log d_C - \frac{1}{\ln 2} \frac{d_C}{d_D}}_{d_C \leq d_D \text{と考えてる}}$$

また、Schmidt分解を考えると、$H(C)_\Psi = H(D)_\Psi$ も分かる。

$d_C > d_D$ もまとめて書くと、

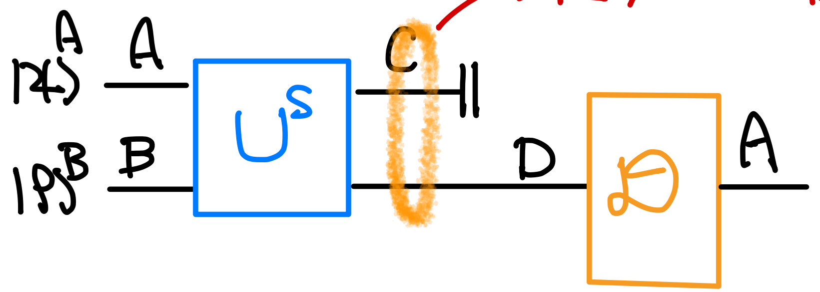
$$\log d_{min} - \frac{1}{\ln 2}\frac{d_{min}}{d_{max}} < \mathbb{E}_U[H(C)_\Psi] = \mathbb{E}_U[H(D)_\Psi] \leq \log d_{min}$$

ここで $d_{min/max} = \min/\max\{d_C, d_D\}$

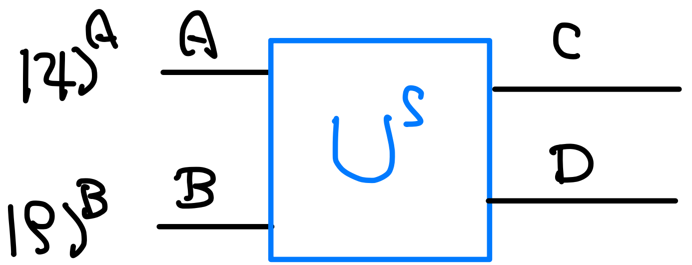
$\rightsquigarrow$ $|\Psi\rangle^{CD} = U^S(|\psi\rangle^A \otimes |\rho\rangle^B)$ は、($|\psi\rangle$ や $|\rho\rangle$ に依らず)

ほぼ最大のエンタングルメントを有することが分かった。

$|\Psi\rangle^{CD}$ ≈最大エンタングル状態



Step 2 Ψ^C と Ψ^D ？

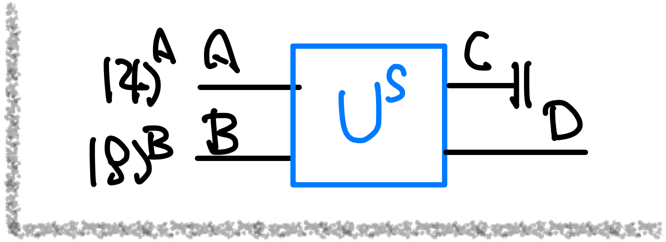


$\}$ $|\Psi\rangle^{CD}$ ≈ 最大エンタングル状態.

Schmidt分解 : $|\Psi\rangle^{CD} \approx \frac{1}{\sqrt{d_{min}}} \sum_{j=1}^{d_{min}} |e_j\rangle^C \otimes |f_j\rangle^D$, $\quad d_{min} = \min\{d_C, d_D\}$

$$\Psi^C \approx \frac{1}{d_{min}} \sum_{j=1}^{d_{min}} |e_j\rangle\langle e_j|^C \qquad \Psi^D \approx \frac{1}{d_{min}} \sum_{j=1}^{d_{min}} |f_j\rangle\langle f_j|^C$$

CとDの小さい方は $\propto I$ だが、大きい方は $\propto \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$.



Ψ^C 残りのBH

$n-l$ qubits

$$\approx \frac{1}{d_D}\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{d_D} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \approx \frac{1}{2^{n/2}}\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} \qquad \approx \frac{I^C}{d_C}$$

$l=0$ $\qquad$ $l=n/2$ $\qquad$ $l=n$ $\qquad$ l

$$\approx \frac{I^D}{d_D} \qquad \approx \frac{1}{2^{n/2}}\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} \qquad \approx \frac{1}{d_C}\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{d_C} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$|\psi\rangle^A$の情報はもたない。

$l\approx n$ ならば、この状態から $|\psi\rangle^A$ を復元できるはず。

→ どうやってる？

Ψ^D New radiation

l qubits

$l \approx n$ のときでも、

$$\Phi^D \approx \frac{1}{d_c}\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{d_c} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} d_c & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

・固有値は $|\psi\rangle^A$ に依存しない。

・重要なのは、固有状態（サポート）。

$$= \frac{1}{d_c}\sum_{j=1}^{d_c} |f_j\rangle\langle f_j| = \frac{1}{d_c}\Pi^D(\psi)$$

この射影演算子が、$|\psi\rangle^A$ に依存する!?

$\rightsquigarrow$ この依存性を知るために、$d_c \ll d_D$ $(\Leftrightarrow l \gg n/2)$ の場合を考察する。

$$\Phi^{C}(\psi) \simeq \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi^{D}(\psi) \simeq \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{d_c} \Big\} d_c & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>**claim**</u>

> $|\psi\rangle^{A} \perp |\psi^{\perp}\rangle^{A}$ という二つの入力を考える。
>
> この時、近似的に $\Phi^{D}(\psi) \perp \Phi^{D}(\psi^{\perp})$ である。

つまり、入力が直交していれば、出力も(ほぼ)直交している。

これを"hand-waving"に示す。

直交性の目安：一般のベクトル $|v\rangle$ と $|w\rangle$

$$|\langle v, w\rangle| = \| |v\rangle \| \times \| |w\rangle \| \times \cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{|\langle v, w\rangle|}{\| |v\rangle \| \, \| |w\rangle \|} \ll 1 \iff |v\rangle と |w\rangle はほぼ直交。$$

$\hookrightarrow$ $\Psi^{D}_{(\psi)}$ や $\Psi^{D}_{(\psi')}$ は行列なので、Hilbert-Schmidt 内積を使ってみよう。

- $\langle M, N\rangle := \mathrm{Tr}[M^{\dagger} N]$.
- $\|M\|_2 := \sqrt{\langle M, M\rangle}$

以下では

$$\frac{|\langle \Psi^{D}_{(\psi)}, \Psi^{D}_{(\psi')}\rangle|}{\|\Psi^{D}_{(\psi)}\|_2 \, \|\Psi^{D}_{(\psi')}\|_2}$$

を "hand-waving" に考える。

① $\mathbb{E}_U \|\Psi^{D}_{(\psi)}\|_2^2 = \mathbb{E}_U\left[\mathrm{Tr}[(\Psi^{D}_{(\psi)})^2]\right] = \dfrac{d_C + d_D}{d_S + 1} \approx \dfrac{1}{d_C} + \dfrac{1}{d_D}$

すでにやった!!

$\rightsquigarrow$ (ほんとはややこしいだが) $\mathbb{E}_U \|\Psi^D_{(\psi)}\|_2 = \mathbb{E}_U \|\Psi^D_{(\psi^\perp)}\|_2$

$$\approx \sqrt{\frac{1}{d_C} + \frac{1}{d_D}}$$

② $\mathbb{E}_U \left| \langle \Psi^D_{(\psi)}, \Psi^D_{(\psi^\perp)} \rangle \right|$

$= \mathbb{E}_U \left| \mathrm{Tr}\left[\Psi^{D\dagger}_{(\psi)} \Psi^D_{(\psi^\perp)} \right] \right|$ $\quad \Psi^\dagger_{(\psi)} = \Psi_{(\psi)}$ & 両方 ≥ 0

$= \mathbb{E}_U \left[\mathrm{Tr}\left[\Psi^D_{(\psi)} \Psi^D_{(\psi^\perp)} \right] \right]$

$\vdots$

$$= \mathbb{E}_U \left[\mathrm{Tr}\left[\underbrace{(U^S \otimes U^{S'})}_{= \alpha \mathbb{I}^{SS'} + \beta \mathbb{F}^{SS'}} (|\psi\rangle\langle\psi|^A \otimes |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|^{A'} \otimes |\phi\rangle\langle\phi|^B \otimes |\phi\rangle\langle\phi|^{B'}) (U^S \otimes U^{S'})^\dagger \times (\mathbb{F}^{DD'} \otimes \mathbb{I}^{CC'}) \right] \right]$$

$$= \cdots = \frac{1}{d_D}\left(1 + \frac{1}{d_S^2 - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{d_C^2}\right) \approx \frac{1}{d_D}$$

①と②より、hand-waving には、

$$\frac{|\langle \Phi^{D}(\psi), \Phi^{D}(\psi^{\perp})\rangle|}{\|\Phi^{D}(\psi)\|_2 \, \|\Phi^{D}(\psi^{\perp})\|_2} \approx \frac{1/d_D}{1/d_D + 1/d_C} = \frac{d_C}{d_D + d_C} \ll 1$$

$d_C \ll d_D$ の場合

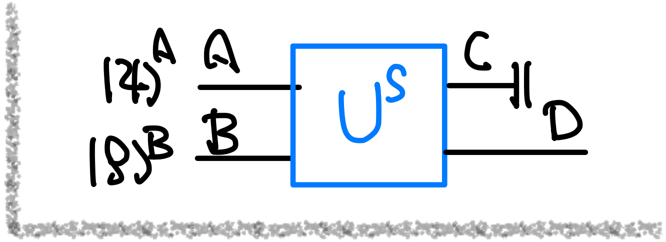
ということで、

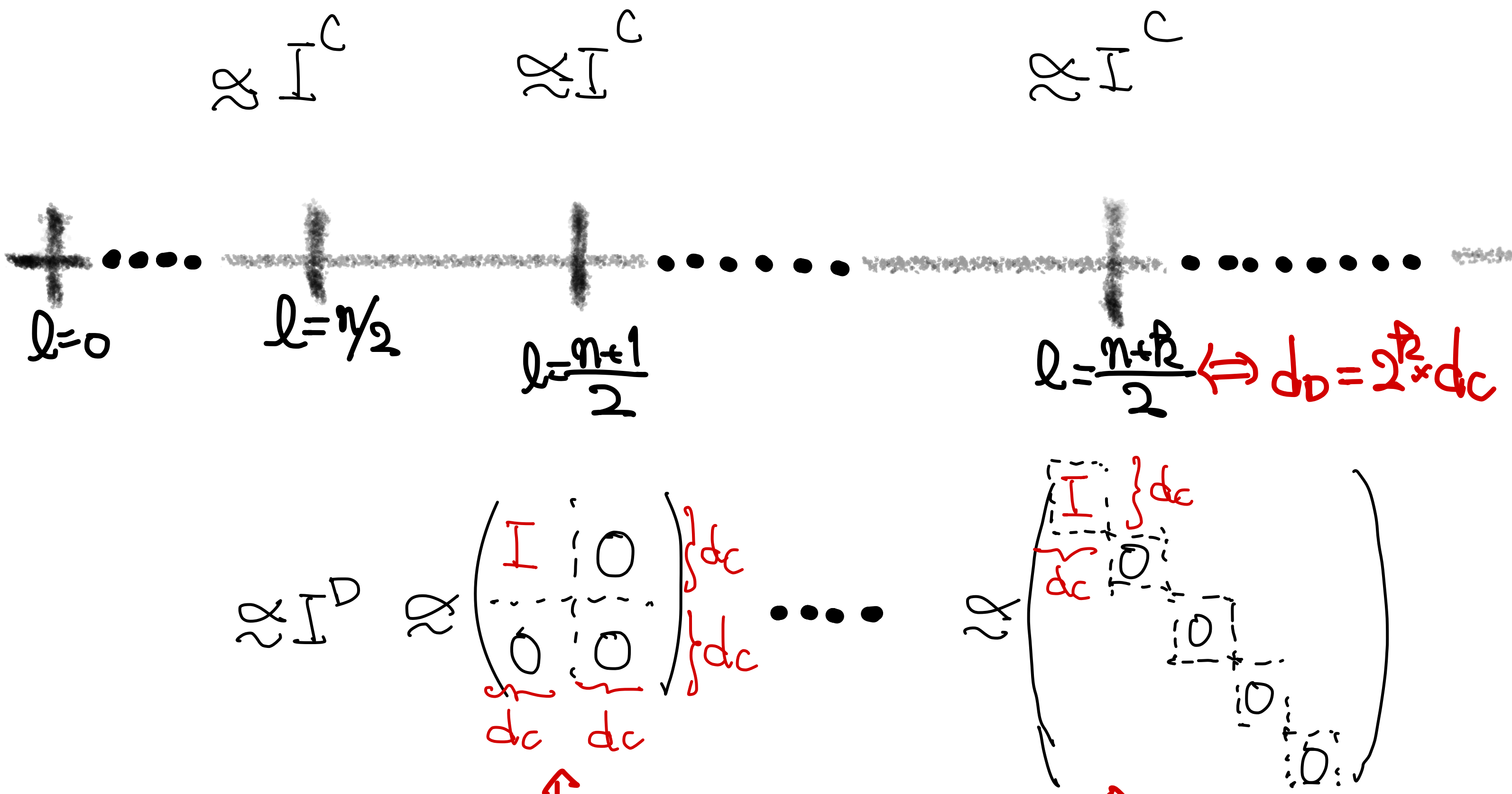
めちゃくちゃ hand-waving で、絶対に論文には書けないが、

$$d_C \ll d_D \implies \begin{cases} |\psi\rangle^{A} \longmapsto \Phi^{D}(\psi) \propto \begin{pmatrix} I & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \\ |\psi^{\perp}\rangle^{A} \longmapsto \Phi^{D}(\psi^{\perp}) \propto \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & I & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

と考えられる。

Ψ^C 残りのBH
$n-l$ qubits





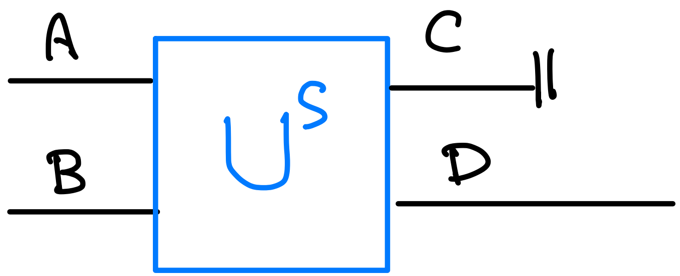
直交する状態1組
$(|\psi\rangle^A, |\psi^\perp\rangle^A)$ だけが直交性を保てる。

2^kコのブロックがあるので、A系の基底全てが直交性を保てる!!

Ψ^D New radiation
l qubits

つまり、$d_D \approx 2^k \times d_C$ であれば、

$\{|e_j^A\rangle\}_{j=1}^{2^k} \Rightarrow |e_j\rangle$



i番目のブロック

$\Phi^D \approx 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus I \oplus \cdots \oplus 0$

と期待される。これをHaarの Collision-free の性質と呼ぶ。

期待　$d_D \geq 2^k \times d_C \Leftrightarrow l \geq \frac{n+k}{2}$ ならば、

$\Phi^D_{(\psi)}$ から $|\psi\rangle^A$ を復元できそう。

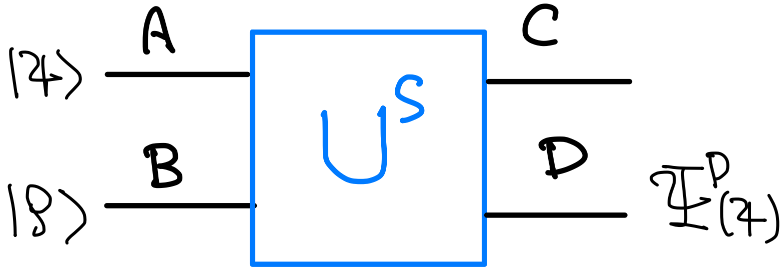
Haar ⇒ Collision-freeのおかげで直交性が保たれる。

⇒ Aの 2^k コの直交状態を保つためには、

Dの次元が $d_D \geq 2^k d_C$ であることが必要。

背後にある論理

ここまでのまとめ。



U^S が Haar random

$\swarrow$ $\Downarrow$

$|\psi\rangle$ や $|\varphi\rangle$ に依存せず、

C-D間がほぼ最大にエンタングル。

[$\Leftrightarrow$ $\Psi^D_{(\psi)} \approx \frac{1}{d_{min}} \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{d_{min}} & \\ & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}}_{d_D}$]

Collision-free の性質により

$\Psi^D_{(\psi)} \perp \Psi^D_{(\psi^\perp)}$

が成立する。

$\Downarrow$ $\swarrow$

デコーダをかけれる系

「系Dの大きさ = d_D」と「$\Psi^D_{(\psi)}$ の rank = d_{min}」と「A系で直交する状態のコスウ = d_A」

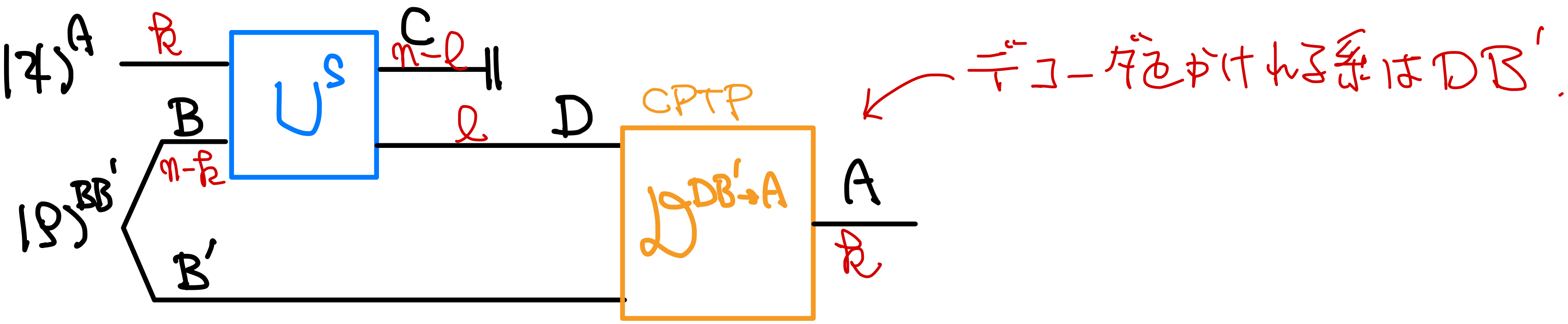
で復元可能かが決まる。

"箱"が十分大きければよい。

$d_D \geq d_{min} \times d_A \iff |\psi\rangle$ を復元可能

2-4. HPプロトコル2.

一般の場合には、どう考えればよいか？



① C-DB'間のエンタングルメント？

② Collision-free？ ($\Psi^{DB'}(\psi) \perp \Psi^{DB'}(\psi^{\perp})$ ？).

①：それはできる!!

$$\mathbb{E}_U[H(C)_\Psi] \gtrsim \log d_C - \frac{1}{\ln 2}\frac{d_C}{d_D\, \underbrace{2^{H_2(B)_\rho}}_{\text{extra term}}}$$

$\Longrightarrow$ $d_C \le d_D 2^{H_2(B)_\rho}$ であれば、C-DB'間は最大エンタングルメント。

$$\Longleftrightarrow \quad \Psi^{DB'}_{(z)} \approx \frac{\Pi^{DB'}}{d_C}$$

← rank d_C の射影演算子.

② やればできる!!

$$\left|\left\langle \Psi^{DB'}_{(z)}, \Psi^{DB'}_{(z')} \right\rangle\right| \fallingdotseq \mathrm{Tr}\left[\Psi^{DB'}(z)\ \Psi^{DB'}(z')\right] \approx \frac{1}{d_D\, 2^{H_2(B)_\rho}}$$

$$\left\| \Psi^{DB'}_{(z \text{ or } z')} \right\|_2 \approx \sqrt{\frac{1}{d_C}}$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{\left|\left\langle \Psi^{DB'}_{(z)}, \Psi^{DB'}_{(z')} \right\rangle\right|}{\left\|\Psi^{DB'}_{(z)}\right\|_2 \left\|\Psi^{DB'}_{(z')}\right\|_2} \approx \frac{d_C}{d_D\, 2^{H_2(B)_\rho}}$$

$\Longleftrightarrow$ $d_C \ll d_D\, 2^{H_2(B)_\rho}$ であれば、Collision-free と考えられる。

直交する one pair は

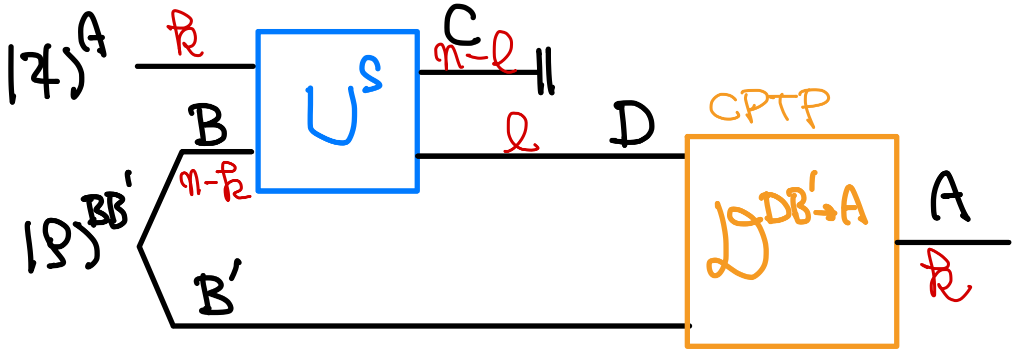
①と②を認めれば、復元可能の条件は以下になるはず。

系DB'の大きさ $\geq$ $\Psi^{DB'}_{(\psi)}$ のrank $\times$ A系で直交する状態の個数

系DB'の大きさ $= d_D d_{B'}$????

$\Psi^{DB'}_{(\psi)}$ のrank $= d_C$

A系で直交する状態の個数 $= d_A$



例えば、

$$|\rho\rangle^{BB'} = (1-\varepsilon)|0\rangle^B|0\rangle^{B'} + \frac{\varepsilon}{M}\left(|1\rangle^B|1\rangle^{B'} + \cdots + |M\rangle^B|M\rangle^{B'}\right)$$

Schmidt分解

だったとすると、

$$|\rho\rangle^{BB'} \simeq |0\rangle^B|0\rangle^{B'}$$

なので実質的に $d_{B'} \simeq 1$.

一般には、$d_{B'} \approx 2^{\rho^B \text{のエントロピー}} = 2^{H_2(B)_\rho}$

effectiveには。。　　これまで H_2 が出てきたしね。

この考察から、

☆ $d_D \times 2^{H_2(B)_\rho} \geq d_C d_A \iff$ 復元可能.

$\Updownarrow$

$$\ell \geq \frac{n + k - H_2(B)_\rho}{2}$$

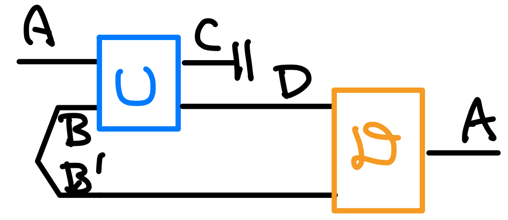
NOTE

☆がみたされていれば、
①と②の条件 $d_D 2^{H_2} \geq d_C$ も
みたされている。

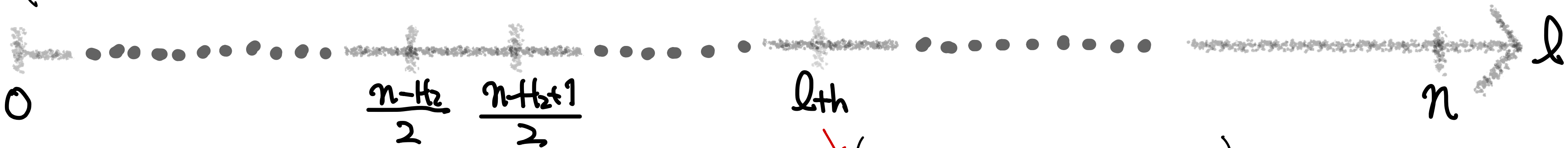
Ψ^C 残りのBH

$n-\ell$ qubits

$$\ell_{th} = \frac{n+k-H_2(B)_\rho}{2}$$



$$\approx \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \approx \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ずっと} \approx I^C}$$



$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\text{eff.}} \qquad \approx \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{\text{eff}}$$

$$\approx \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{\text{eff.}}$$

$$\approx \begin{pmatrix} \boxed{I}\}d_C & & & & & 0 \\ & \boxed{0} & & & & \\ & & \boxed{0} & & & \\ & & & \boxed{0} & & \\ & & & & \boxed{0} & \\ 0 & & & & & \ddots \end{pmatrix}_{\text{eff}} \Bigg\} d_D \times 2^{H_2(B)_\rho}$$

d_C

$d_A = 2^k$ コのブロック.

$\Psi^{DB'}$ New radiation

ℓ qubits

+ Old radiation "$H_2(B)_\rho$" qubits.

ここまでのメッセージ:

Haarランダム・ユニタリ を使っている限り、

① Maxエンタングルメント
② Collision-free

"箱"の大きさだけで全てが決まりそう。
= ヒルベルト空間の次元
↑
実効的な

<u>Remark.</u>

- Haarが絶対に必要という訳ではない。

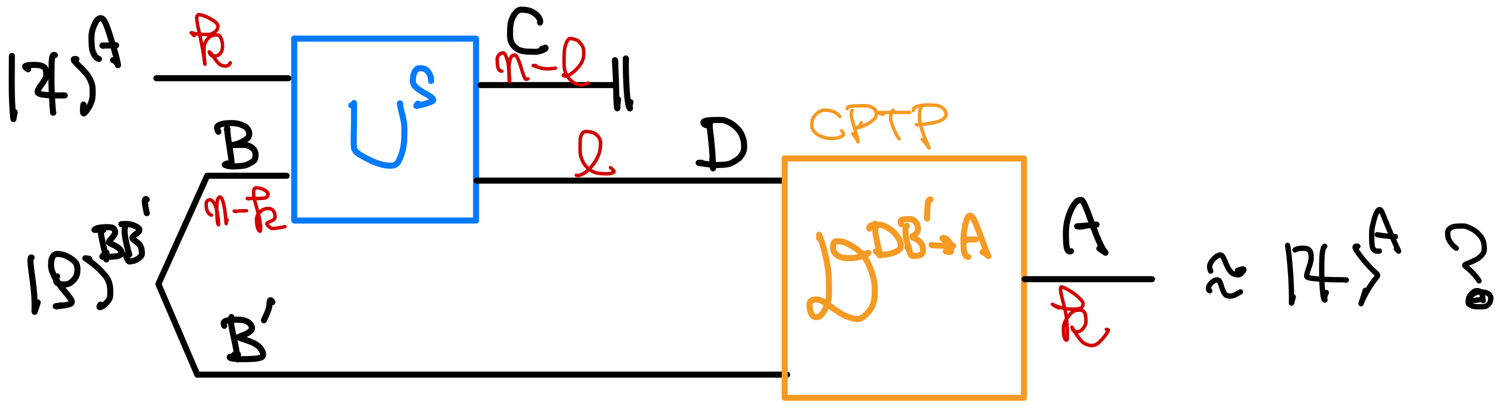
例) ユニタリ 2-designで十分。クリフォード・ユニタリでも十分。

e^{-iHt} (Hは十分"複雑") でもO.K.と期待される。

3. Hayden-Preskill：まとめ.

ここまでの話は直観的に分かりやすかった（かもしれない）が、
何かを証明するには hand-waving すぎて役に立たない酒飲み話。

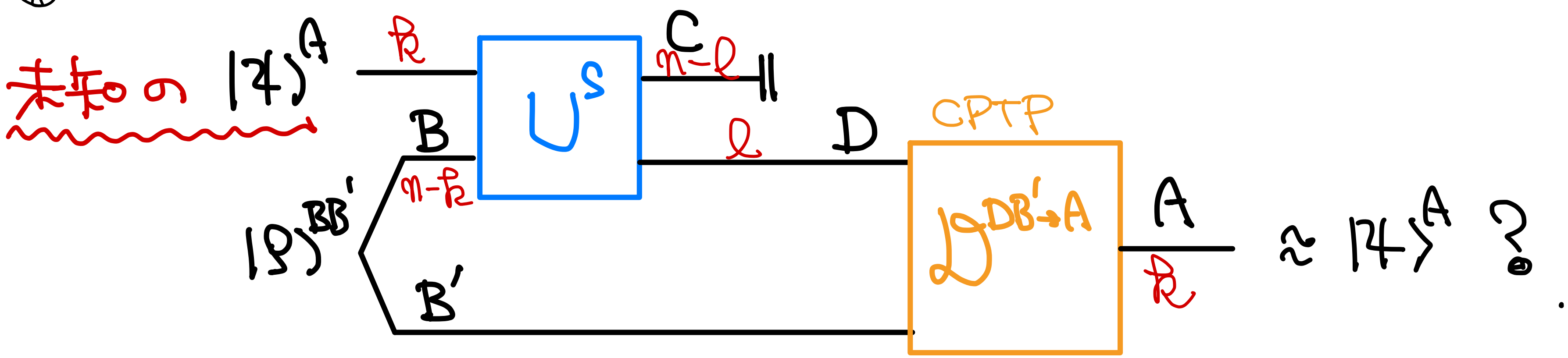
3-1. "復元する" とは？



① $|\psi\rangle$ って何だよ？ ⟶ 量子情報源 (Q. info. source)

② $\approx |\psi\rangle$ って何だよ？ ⟶ 距離.

①



"知らない"ことをどう定式化するか?

↳ 1つの方法は、確率分布を使うこと。　例: サイコロ

↳ "確率 p_j で $|\psi_j\rangle$" と定式化すればよい?

$\Leftrightarrow$ アンサンブル $\{p_j, |\psi_j\rangle\}_j$

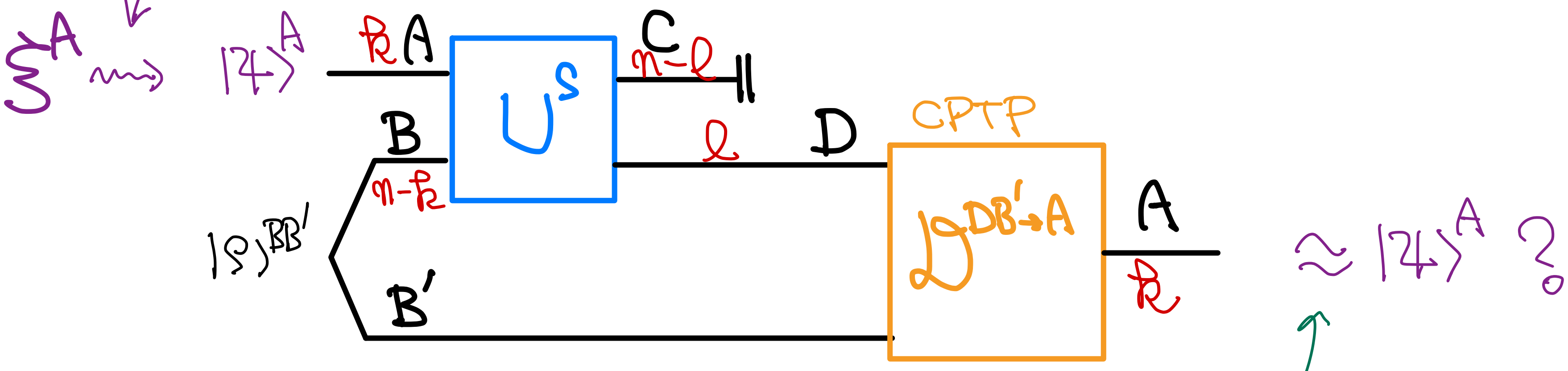
アンサンブルを用いた定式化は、量子では危険!! $\Rightarrow$ 密度行列 $\sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$

e.g.) $\sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \sum_\alpha q_\alpha |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\alpha|$ ならば、$\{p_j, |\psi_j\rangle\}_j$ と $\{q_\alpha, |\phi_\alpha\rangle\}_\alpha$ は物理的に識別不可能。

ξ^A: 密度行列 は、純粋状態の集合上の確率分布を与えるもの。

量子情報源。

“サイコロを投げる”と、ξ^Aが定める確率に従って、$|\psi\rangle^A$がでてくる。



ξ^Aが$|\psi\rangle^A$を出したときには、
ここの状態も$|\psi\rangle^A$であってほしい。

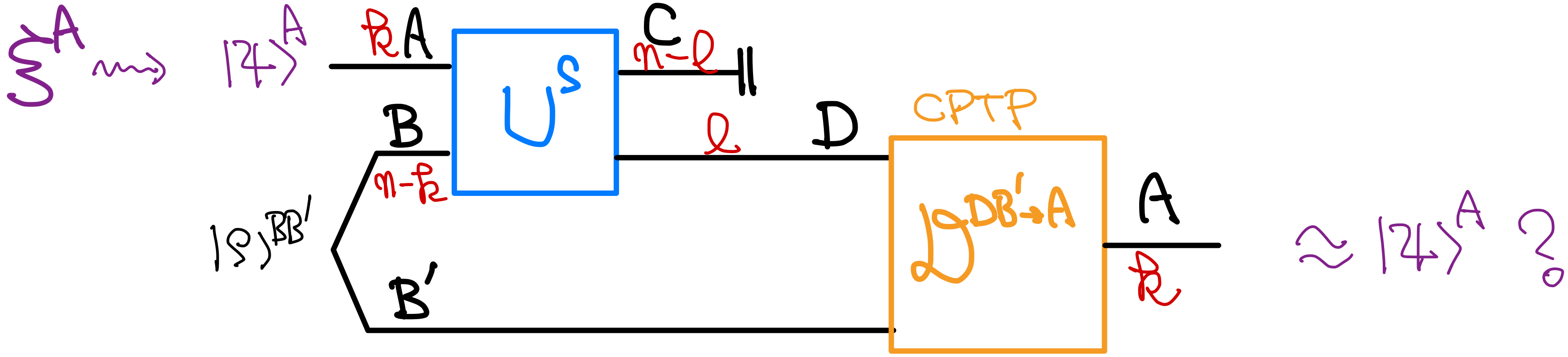
どうやって定式化すればよいか？

$\|$ 出力状態 $- |\psi\rangle\langle\psi|^A \|$ を“確率分布” ξ^Aで平均したい!!

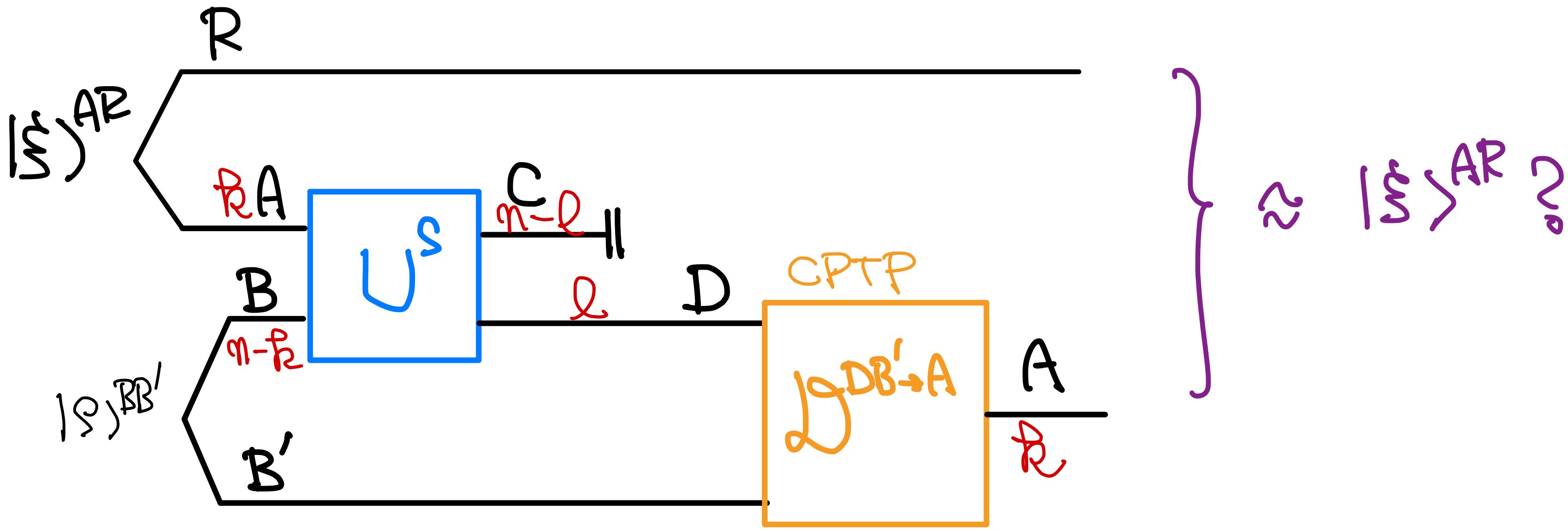
サイコロが$|\psi\rangle$を出したという条件のもとでの、復元のエラー。

これはよく分からない。

↳ 量子情報では、リファレンス系Rを導入して、純粋化 $|\xi\rangle^{AR}$ を用いる。

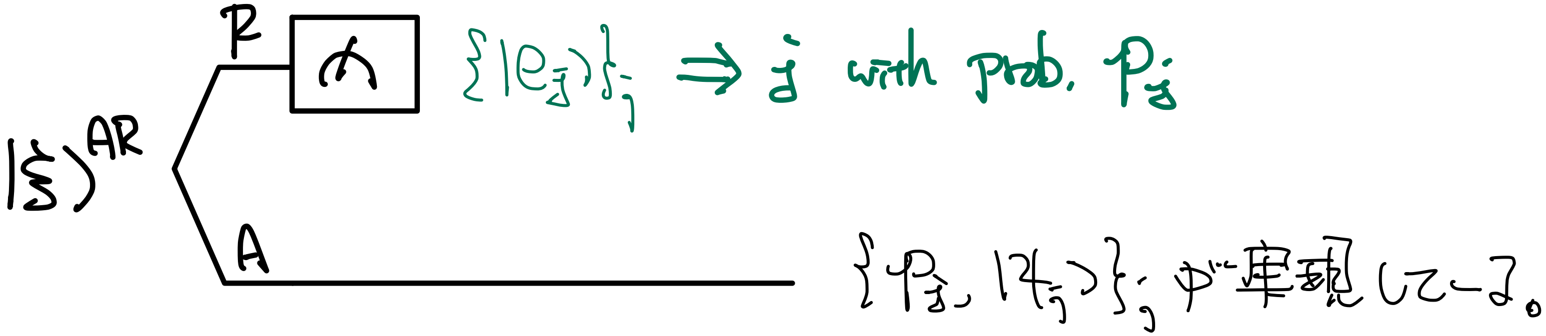


標準的な定式化.



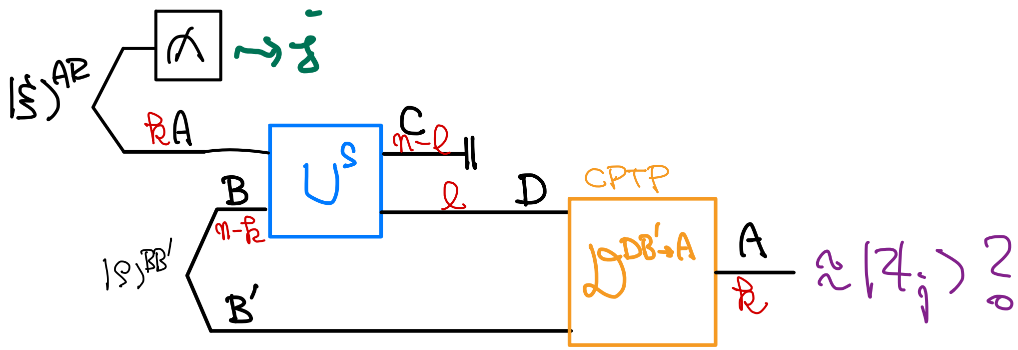
なぜこれで"よい"とされているのか?

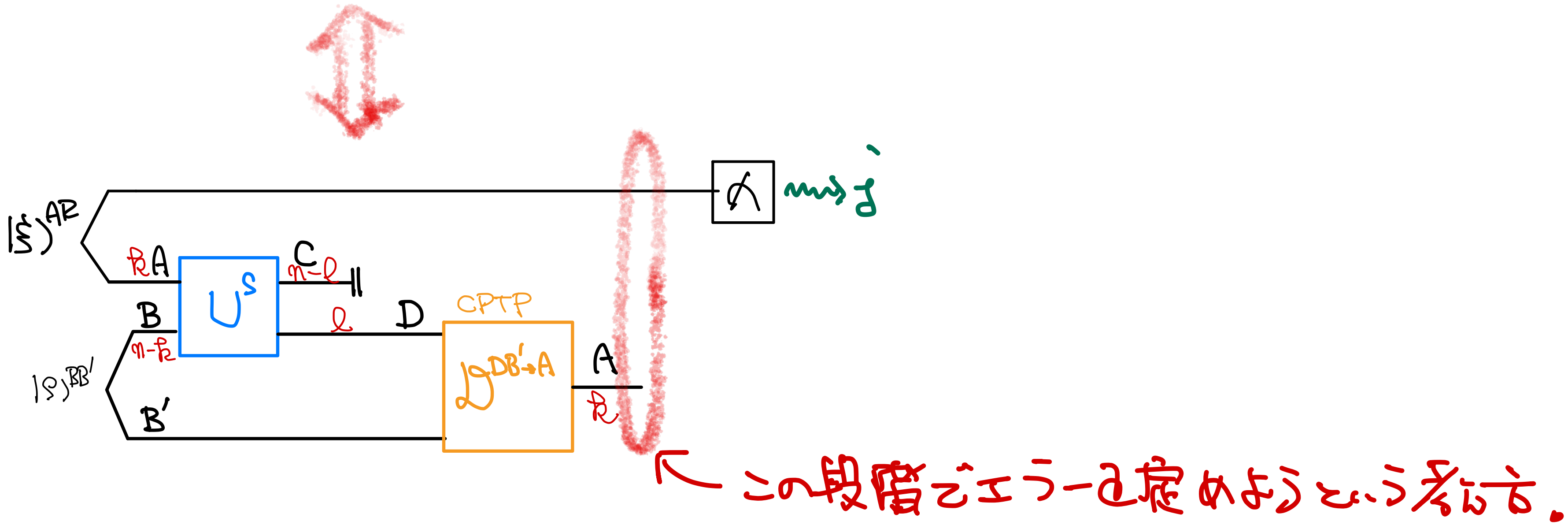
"$|\xi\rangle^{AR}$ の R を適切に測定することで、系Aには密度行列が ξ^A である任意のアンサンブル $\{p_j, |\psi_j\rangle\}_j$ を実現できる。"



↳ この理解に基づくと、これまでのシナリオを以下のように書き換えられる。

これまでの描像 (平均の取り方がよくわからない)





以下では、この方法でHPプロトコルの復元エラーを定める。

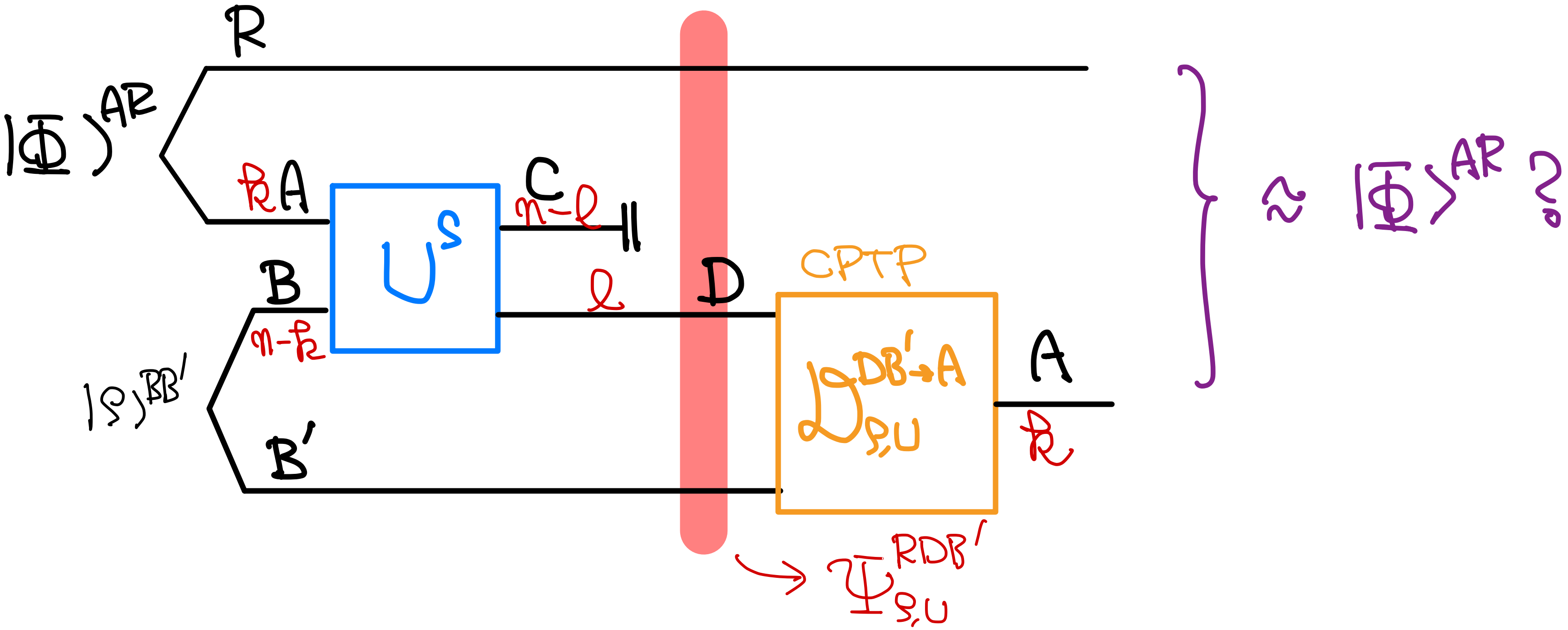
特に、バイアスのない量子情報源を考えると、

$\xi^A = \pi^A$ なので、$|\xi\rangle^{AR} = |\Phi\rangle^{AR}$: max. エンタングル状態

完全混合状態

とする。

HPプロトコルの復元エラー



$$\Delta(\rho, U, \mathcal{D}) := \frac{1}{2}\left\| \mathcal{D}_{\rho,U}^{DB'\to A}\left(\Psi_{\rho,U}^{RDB'}\right) - |\Phi\rangle\langle\Phi|^{AR} \right\|_1$$

規格化

$$0 \le \Delta \le 1.$$

トレース距離

$$\|O\|_1 := \mathrm{Tr}\sqrt{O^\dagger O}$$

(固有値の絶対値の和)

ベストなデコーダを考えたいので、

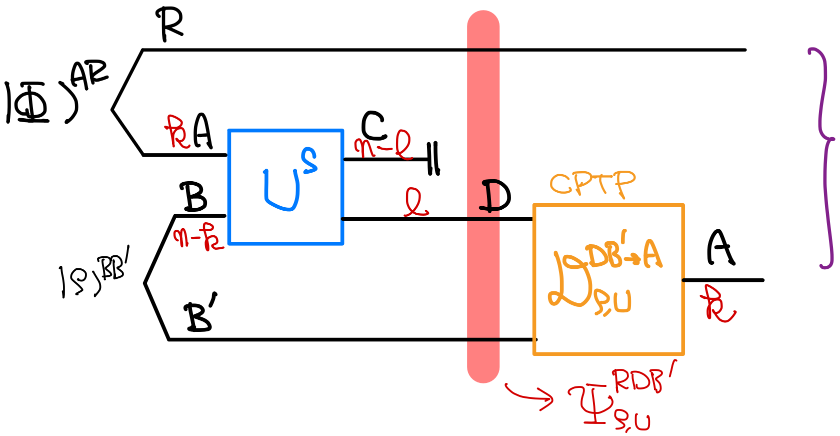
$$\Delta(\rho, U) := \inf_{\mathcal{D}:\mathrm{CPTP}} \Delta(\rho, U, \mathcal{D}) \quad 。$$

Haarランダムなので、平均をとってしまう。

$$\overline{\Delta}(\rho) := \mathbb{E}_{U \sim \mathrm{Haar}} \left[\Delta(\rho, U) \right] 。$$

標準的なHPの復元エラー。

3-2. 解析手法.



$$\bar{\Delta}(\rho) := \frac{1}{2}\mathbb{E}_U\left[\inf_{\mathcal{D}} \left\| \mathcal{D}_{\rho,U}^{DB'\to A}(\Psi_{\rho,U}^{RDB'}) - |\Phi\rangle\langle\Phi|^{AR} \right\|_1\right]$$

デカップリング・アプローチ.

$\Psi_{\rho,U}^{RDB'}$ を考えるかわりに、$\Psi_{\rho,U}^{RC}$ を考える。

リファレンスR + 自分が持っていない系C.

命題

以下を満たすC系の状態σ^Cが存在したとする。

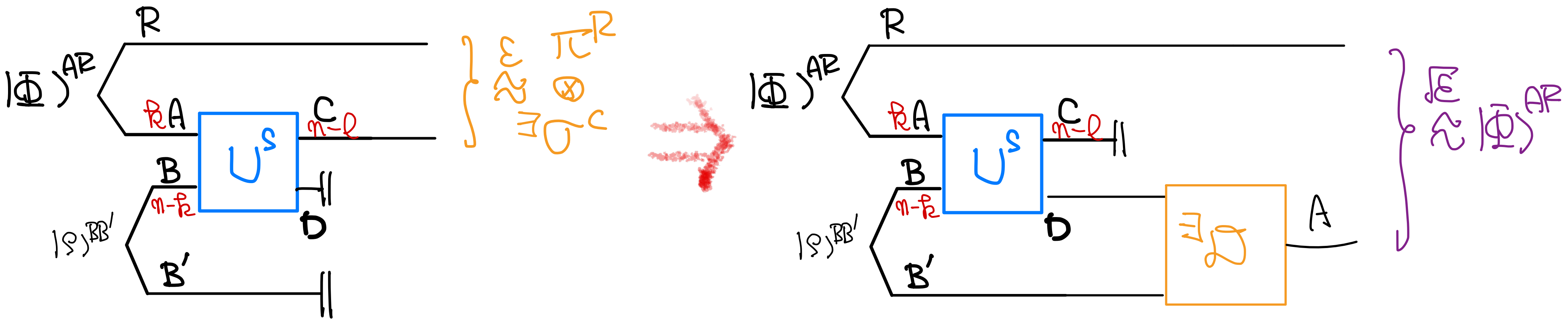
$$\left\| \Psi_{\rho,U}^{RC} - \pi^R \otimes \sigma^C \right\|_1 \le \varepsilon.$$

↑ $|\Phi\rangle^{AR}$の縮約密度行列.

このとき、

$$\Delta(\rho, U, \mathcal{D}_{\rho,U}) \le \sqrt{\varepsilon}$$

をみたすデコーダ $\mathcal{D}_{\rho,U}^{DB'\to A}$ が存在する。



証明の準備：純粋化の自由度の近似版

変形 Uhlmann の定理

ρ^A と σ^A の純粋化を $|\rho\rangle^{AB}$, $|\sigma\rangle^{AC}$ $(B \leq C)$ とする。

$$\| \rho^A - \sigma^A \|_1 \leq \varepsilon \implies$$

アイソメトリ $V^{B\to C}$ で

$$\left\| |\sigma\rangle\langle\sigma|^{AC} - V^{B\to C} |\rho\rangle\langle\rho|^{AB} (V^{B\to C})^\dagger \right\|_1 \leq 2\sqrt{\varepsilon}$$

をみたすものが存在。

<u>Remark</u> $\rho^A = \sigma^A$ とすれば、純粋化の自由度の定理。

命題はこの定理を用いれば直ちに従う。

Proof)

$$\| \Psi_{\rho,U}^{RC} - \pi^R \otimes \sigma^C \|_1 \leq \varepsilon \qquad \text{(仮定)}$$

純粋化

$$|\Psi_{\rho,U}\rangle^{RCDB'} \qquad |\Phi\rangle^{AR} \otimes |\sigma\rangle^{CC'} \qquad \text{(C'は十分大きくとる)}$$

よって、アイソメトリ $V^{DB' \to AC'}$ が存在して、

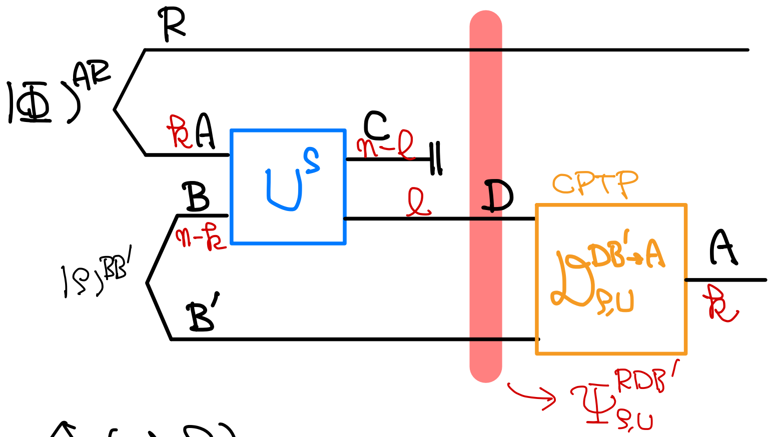
$$V^{DB' \to AC'} |\Psi_{\rho,U}\rangle^{RCDB'} \overset{\leq 2\sqrt{\varepsilon}}{\approx} |\Phi\rangle^{AR} \otimes |\sigma\rangle^{CC'}$$

CC'をトレース・アウトすると、(トレース・アウトで $\| \cdot \|_1$ は小さくなるので)

$$\mathcal{D}^{DB' \to A} (\Psi_{\rho,U}^{RDB'}) \overset{\leq 2\sqrt{\varepsilon}}{\approx} |\Phi\rangle\langle\Phi|^{AR}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Delta(U, \rho, \mathcal{D}) \leq \sqrt{\varepsilon} \qquad \text{(規格化を忘れずに)}$$

∎



$\approx |\Phi\rangle^{AR}$?

$$\boxed{\overline{\Delta}(\rho) := \frac{1}{2}\mathbb{E}_U\left[\inf_{\mathcal{D}} \left\| \mathcal{D}^{DB'\to A}_{\rho,U}\left(\Psi^{RDB'}_{\rho,U}\right) - |\Phi\rangle\langle\Phi|^{AR} \right\|_1\right]}$$

$$\Delta(U,\rho) = \inf_{\mathcal{D}:\mathrm{CPTP}} \Delta(U,\rho,\mathcal{D}) \leq \sqrt{\inf_{\sigma^C} \left\| \Psi^{RC}_{\rho,U} - \pi^R \otimes \sigma^C \right\|_1}$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta}(\rho) \leq \mathbb{E}_U \sqrt{\inf_{\sigma^C} \left\| \Psi^{RC}_{\rho,U} - \pi^R \otimes \sigma^C \right\|_1}$$

$$\leq \sqrt{\mathbb{E}_U \inf_{\sigma^C} \left\| \Psi^{RC}_{\rho,U} - \pi^R \otimes \sigma^C \right\|_1}$$

$$\leq \sqrt{\mathbb{E}_U \left\| \Psi^{RC}_{\rho,U} - \pi^R \otimes \pi^C \right\|_1}$$

これまでの直観から、
復元できるなら
$\sigma^C \approx \pi^C$ のはず
(Haarのため)

あとはテクニカルな計算。

$$\| O^A \|_1^2 \leq d_A \mathrm{Tr}[(O^A)^2]$$

を用いて、

$$\overline{\Delta}(\rho) \leq \left(d_A \mathbb{E}_U \left[\mathrm{Tr} (\Xi_{\rho,U}^{RC} - \pi^R \otimes \pi^C)^2 \right] \right)^{1/4}$$

$$= \left(d_A \left\{ \underbrace{\mathbb{E}_U \left[\mathrm{Tr} (\Xi_{\rho,U}^{RC\,2}) \right]}_{} - \frac{1}{d_A d_C} \right\} \right)^{1/4}$$

これは SWAPトリックetc.で計算可.

$$\vdots$$

$$\leq \left(\frac{d_A d_C}{d_D 2^{H_2(B)_\rho}} \right)^{1/4}$$

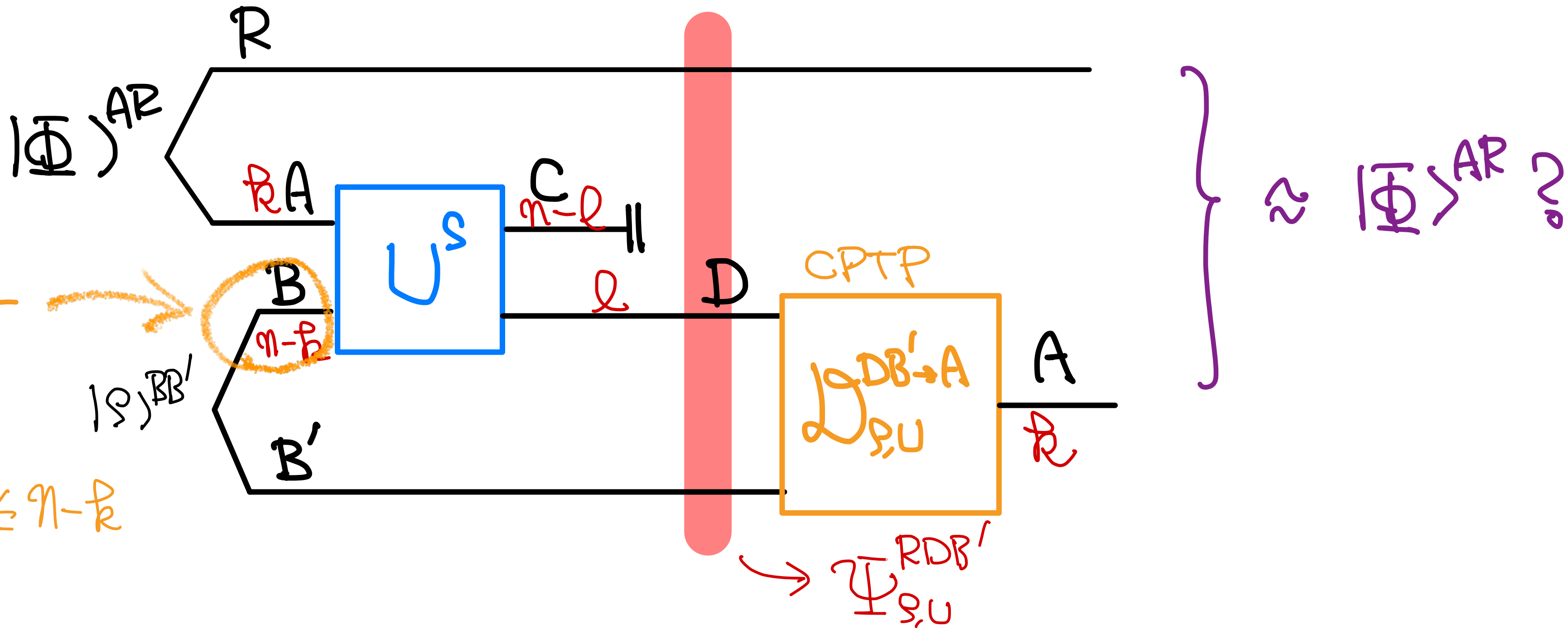
$$= 2^{\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{n+k-H_2(B)_\rho}{2}}_{=l_{th}} - l \right)}$$

直観的理解は正しかった!!

ということで、$\overline{\Delta}(\rho) \leq \varepsilon$ を達成するためには、

$$l \geq l_{th} + \log 1/\varepsilon^2$$

のNew Hawking放射を集めてくればよいことが分かった



このエントロピーが重要

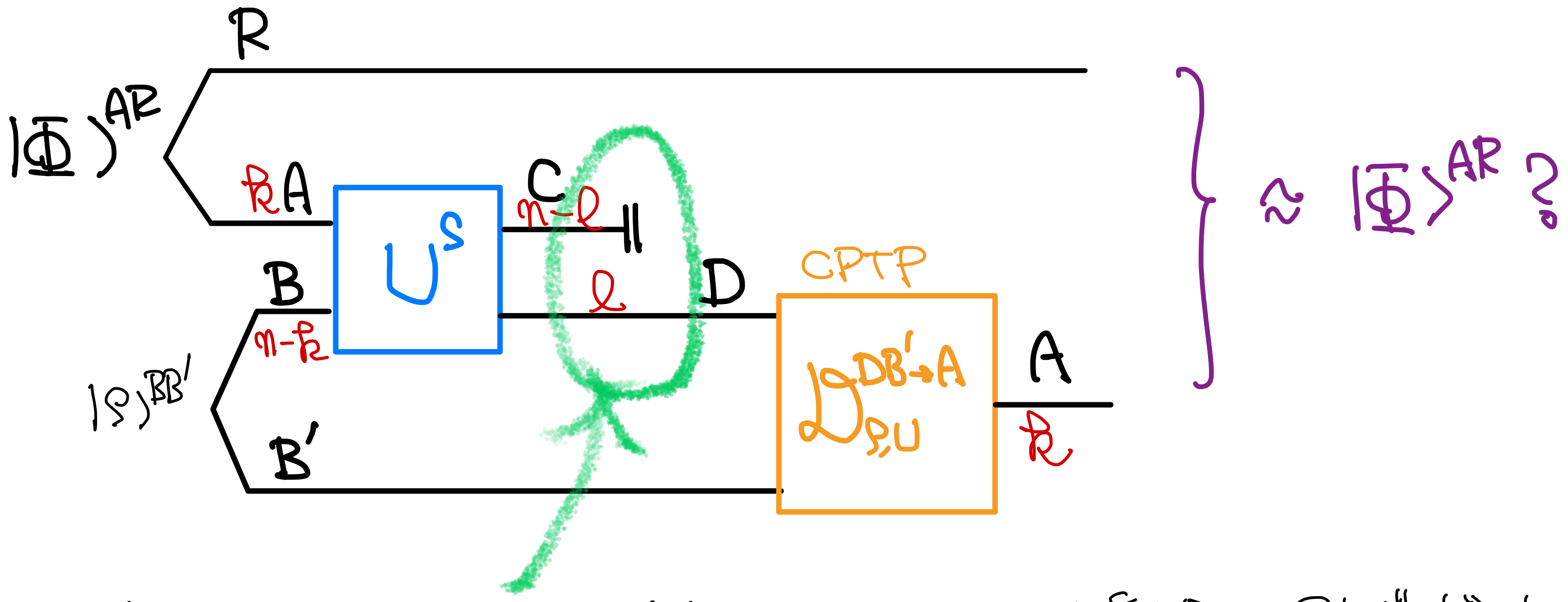
$0 \leq H_2(B)_\rho \leq n-k$

$$\Rightarrow \quad k \leq l_{th} \leq \frac{n+k}{2}$$

Bのエントロピーが最大
⟺ B'の有効次元が最大

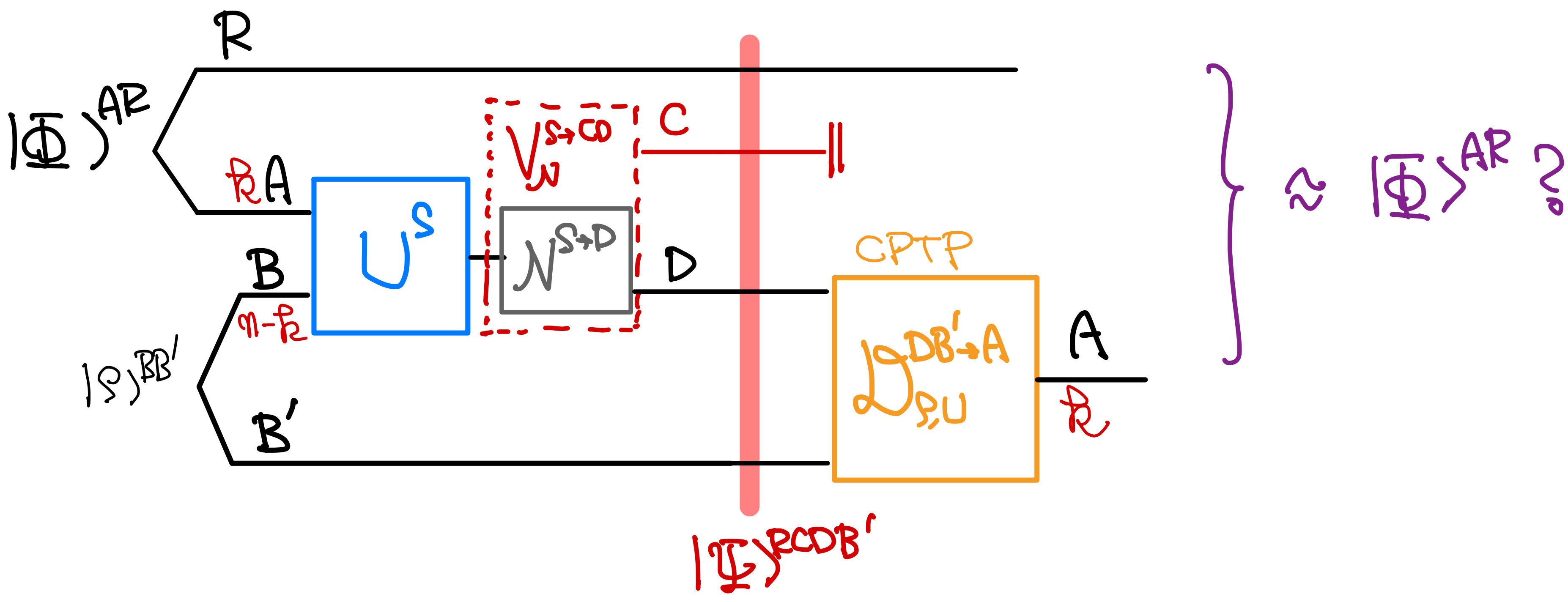
Bのエントロピーが最小
⟺ B'の有効次元が最小

3-3. 脱線：部分トレース以外の場合.



- C をトレース・アウトしたのは C が "残りの BH" だったから。
- 量子情報的には最低でももう少し一般化しておきたい。

↪ S に一般のノイズがかかると？



- $\mathcal{N}^{S\to D}$: ノイズを表すCPTP写像
- $V_{\mathcal{N}}^{S\to CD}$: $\mathcal{N}^{S\to D}$ の Stinespring 拡張（アイソメトリ）

$\Rightarrow$ RCDB' は純粋状態なので、decouplingの考え方が使える。

$\Rightarrow$ R と C が decouple していれば、よいデコーダ $\mathcal{D}$ が存在。

One-shot decoupling 定理を用いると、

$$\mathbb{E}_U\left[\| \Phi^{RC} - \pi^R \otimes \nu^C \|_1 \right] \leq 2^{-\frac{1}{2}\left(H_2(\rho) - R + H_2(S|C)_\nu\right)}$$

ただし、

$$\begin{cases} \nu^{SC} := (\mathrm{id}^S \otimes \mathcal{N}^{S' \to C})(|\Phi\rangle\langle\Phi|^{SS'}) \\ H_2(A|B)_\rho := -\log \inf_{\sigma^B:\mathrm{state}} \mathrm{Tr}\left[\left((I^A \otimes \sigma^B)^{-1/4} \rho^{AB} (I^A \otimes \sigma^B)^{-1/4}\right)^2\right] \end{cases}$$

Renyi-2 条件付きエントロピー

※ たまに、$H_2(A|B)_\rho = H_2(AB)_\rho - H_2(B)_\rho$ と定める

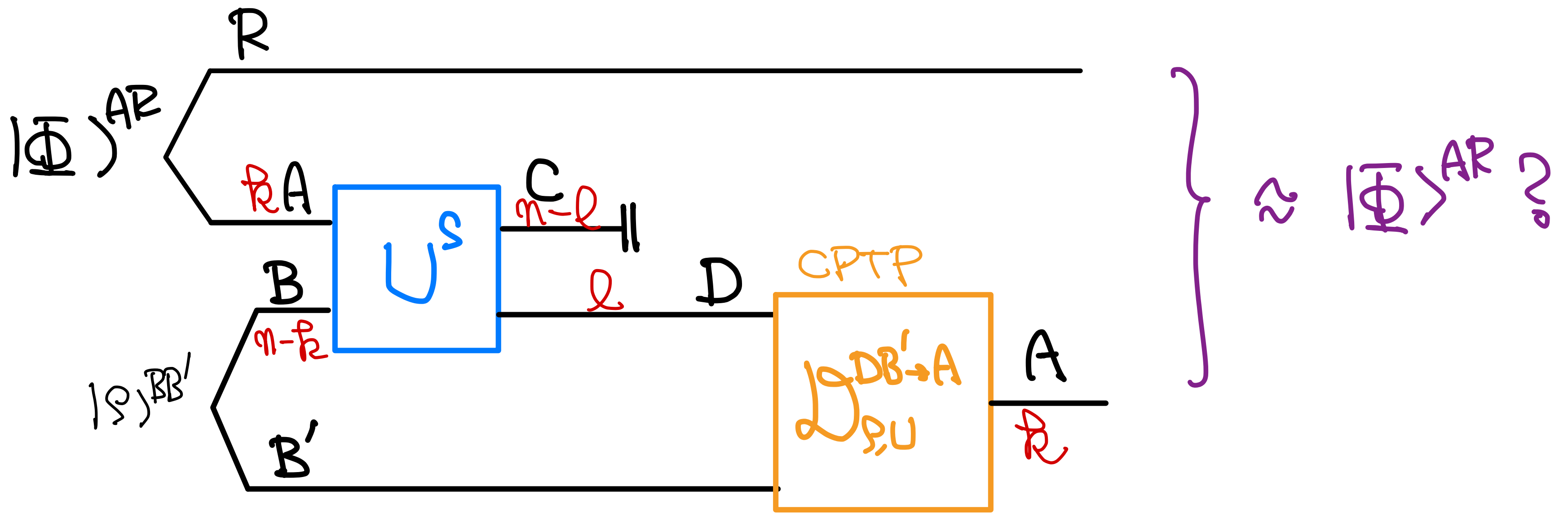
"やばい" 論文があるが、やめましょう....

→ この辺りを理解すれば、量子通信容量定理も分かる。

→ 詳しくは「量子情報理論 林田」を。

4. Hayden-Preskill：応用

4-1. エネルギー等が保存する場合.



これまでは、$U^S \sim$ Haarランダムと仮定してきた。

しかし、エネルギー etc. が(近似的に)保存する場合、Haarではあり得ない。

$\Downarrow$

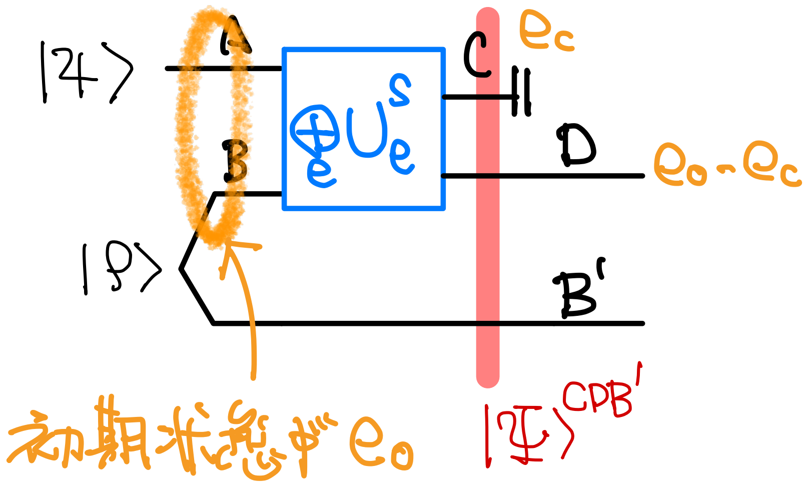
$$\mathcal{H}^S = \bigoplus_e \mathcal{H}_e^S$$: 保存量eによるヒルベルト空間の分解.

$\hookrightarrow$ $U^S = \bigoplus_e U_e^S$ を考えてみる。(遊び).

部分空間内でのHaar.

⇒ これまでの理解から、何が起こるかを定量的に理解可能。

1. 情報復元の遅延.



保存量がない場合

$$\ell \ge \ell_{th} = \frac{n+k-H(B)_\rho}{2}$$ が条件

$$\Leftrightarrow \underbrace{d_D \times 2^{H(B)_\rho}}_{DB'の有効次元} \ge \underbrace{d_A}_{Aの直交する状態のコスウ} \times \underbrace{d_C}_{\Psi^{DB'}のランク}$$

直観:

$$\Psi^C \propto \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi^{DB'} \propto \left.\begin{pmatrix} \underbrace{I}_{d_C} & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}_{\mathrm{eff}}\right\} d_D \times 2^{H(B)_\rho}$$

← d_Aコのブロック

Haar
⇒ 最大エンタングルメント
& Collision-free

ABが初期に保存量 e_0 を持つ $\Rightarrow$ supp(初期状態) $= \mathcal{H}^S_{e_0}$

$\bigoplus_e U^S_e$ によって、この部分空間内だけで最大エンタングルメントが生成される。

この部分空間 $\mathcal{H}^S_{e_0}$ は、CとDによって下のように分割し、

$$\mathcal{H}^S_{e_0} = \bigoplus_{e_c=0}^{e_0} \mathcal{H}^C_{e_c} \otimes \mathcal{H}^D_{e_0-e_c}$$

C系で保存量 e_c を持つ部分空間。

D系で保存量 e_0-e_c を持つ部分空間。

この部分空間上の状態 $\Psi^C_{e_c}$ は、

$$\Psi^C_{e_c} \propto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{\dim \mathcal{H}^C_{e_c}}$$

となる。(∵ maxエンタングルメント)

$$\Psi^D_{e_0-e_c} \propto \left.\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}\right\} \dim \mathcal{H}^C_{e_c} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\right\} \dim \mathcal{H}^D_{e_0-e_c} \times 2^{H(B)_\rho}$$

略

$\Longrightarrow \quad \dim \mathcal{H}^{D}_{e_0-e_c} \times 2^{H(B)\rho} \geq d_A \times \dim \mathcal{H}^{C}_{e_c}$ が、

部分空間 $\mathcal{H}_{e_c}$ の $\mathcal{H}_{e_0-e_c}$ で "$|\psi\rangle^A$ を復元" できる条件のはず。

$\Longrightarrow$ これが全ての e_c で成立すればよいので、

$$^{\forall} e_c = 0, \cdots, e_c, \quad \dim \mathcal{H}^{D}_{e_0-e_c} \times 2^{H(B)\rho} \geq d_A \times \dim \mathcal{H}^{C}_{e_c}$$

が、直観的な復元条件と期待される。

$\longleftarrow$ 実際に "まじめ" なアプローチと一致する。

<u>Remark 1</u>: 部分空間での Haar $\Longrightarrow$ 次元だけで全てが決まる。

<u>Remark 2</u>: 実際には、あまりに小さい空間 ($\mathcal{H}^{C}_{e_c=0}$ など) は ムシしてもよい。

$\dim = O(1)$.

<u>Remark3</u>: 結果として、ℓ_{th} は大きくなる。

てきとうな見積もり。$0<\alpha\le 1$ として、

$$\dim \mathcal{H}^{C}_{e_c} = 2^{\alpha(n-\ell)}, \qquad \dim \mathcal{H}^{P}_{e_0-e_c} = 2^{\alpha\ell}$$

$$\left(\dim \mathcal{H}^{C} = 2^{n-\ell}\right) \qquad \left(\dim \mathcal{H}^{P} = 2^{\ell}\right)$$

とすれば、

$$\ell \ge \underbrace{\frac{n}{2} + \frac{k - H(\rho)_B}{2\alpha}}_{\ell_{th}^{new}} \ge \frac{n + k - H(\rho)_B}{2}$$

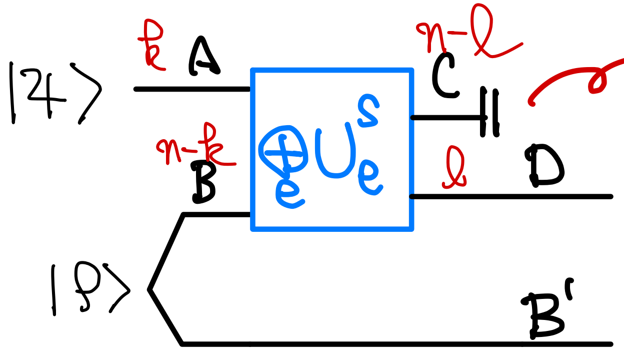
となり、より多くの New radiation が必要になる。

↪ $H(\rho)_B$ の最大値も同様にスケールすると考えれば、

$$0 \le H(\rho)_B \le \alpha(n-k).$$

$$\therefore \quad \frac{1+\alpha}{2\alpha}k \le \ell_{th}^{new} \le \frac{n}{2} + \frac{k}{2\alpha}.$$

2. 情報を完全には復元できない



もし、Cから|ψ⟩の保存量に関する情報を取得できると、Dにデコヒーレンスが生じる。

Cから|ψ⟩の保存量の情報を推定できるか？

1. k qubitの系Aによって、系Sの保存量は $O(k)$ 変化する。
2. この $O(k)$ の変化は、Cに引きつがれ、 $\frac{n-l}{n}\times O(k)$ の変化になる。
3. 一方で、Cにとってみると、系Dがtrace outされるので、そのせいで保存量にゆらぎが生じる。

→ Cは $n-l$ qubitsなので $O(\sqrt{n-l})$.

1〜3より、 $\underbrace{\frac{n-l}{n} \times O(k)}_{\text{系Aのエラーが引き起こす系Cの保存量の変化。}} \gg \underbrace{O(\sqrt{n-l}\,)}_{\text{系Cが持つ保存量のゆらぎ。}}$

であれば、系Cから系Aの保存量を推定できる!!

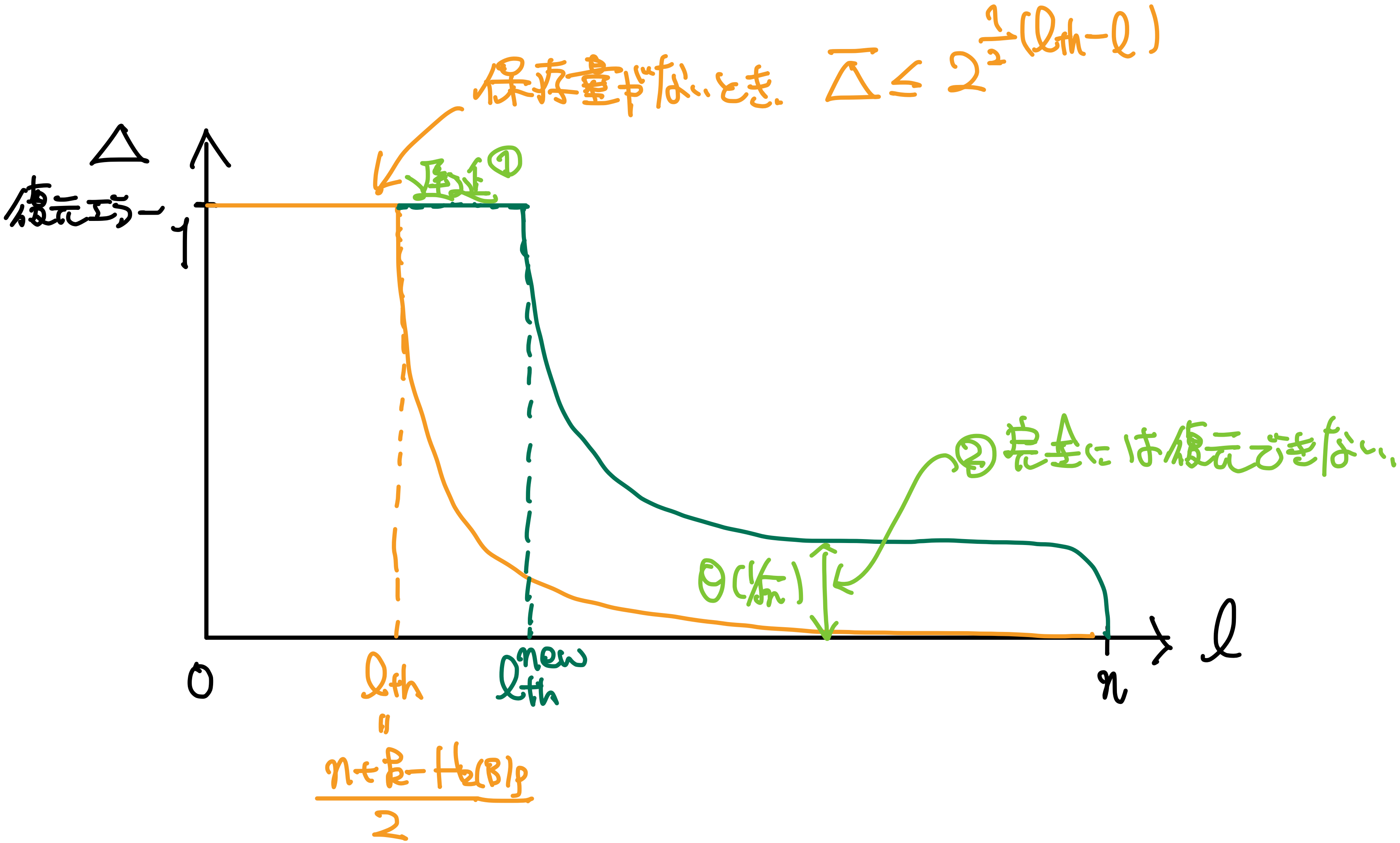
つまり、

$$k \gg O\left(\frac{n}{\sqrt{n-l}}\right) \approx O(\sqrt{n})$$

のときは、情報を完全には復元できないことになる。

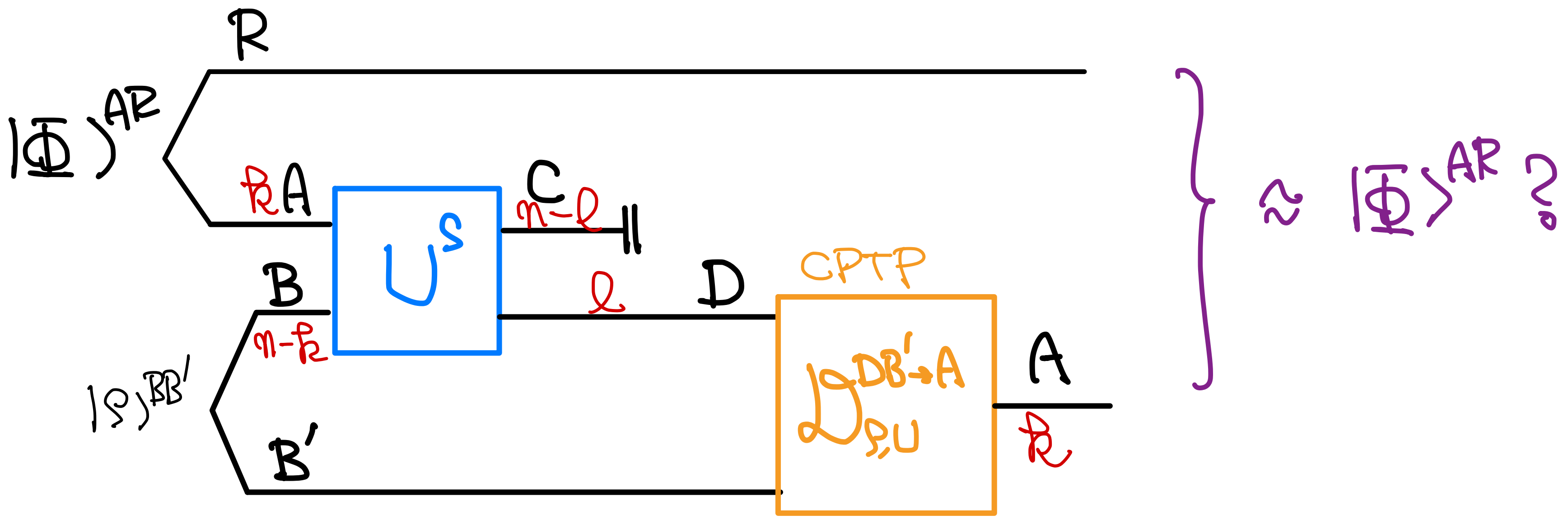
⇝ これも具体例で確かめることができる。

1と2をまとめる.



保存量がないとき. $\overline{\Delta} \leq 2^{\frac{1}{2}(l_{th}-l)}$
Δ
復元エラー
1
遅延①
②完全には復元できない.
$\Theta(1/n)$
l
0
l_{th}
l_{th}^{new}
n
$= \dfrac{n+k_E-H_2(B)_\rho}{2}$

4-2. Hayden-Preskill のデコーダ

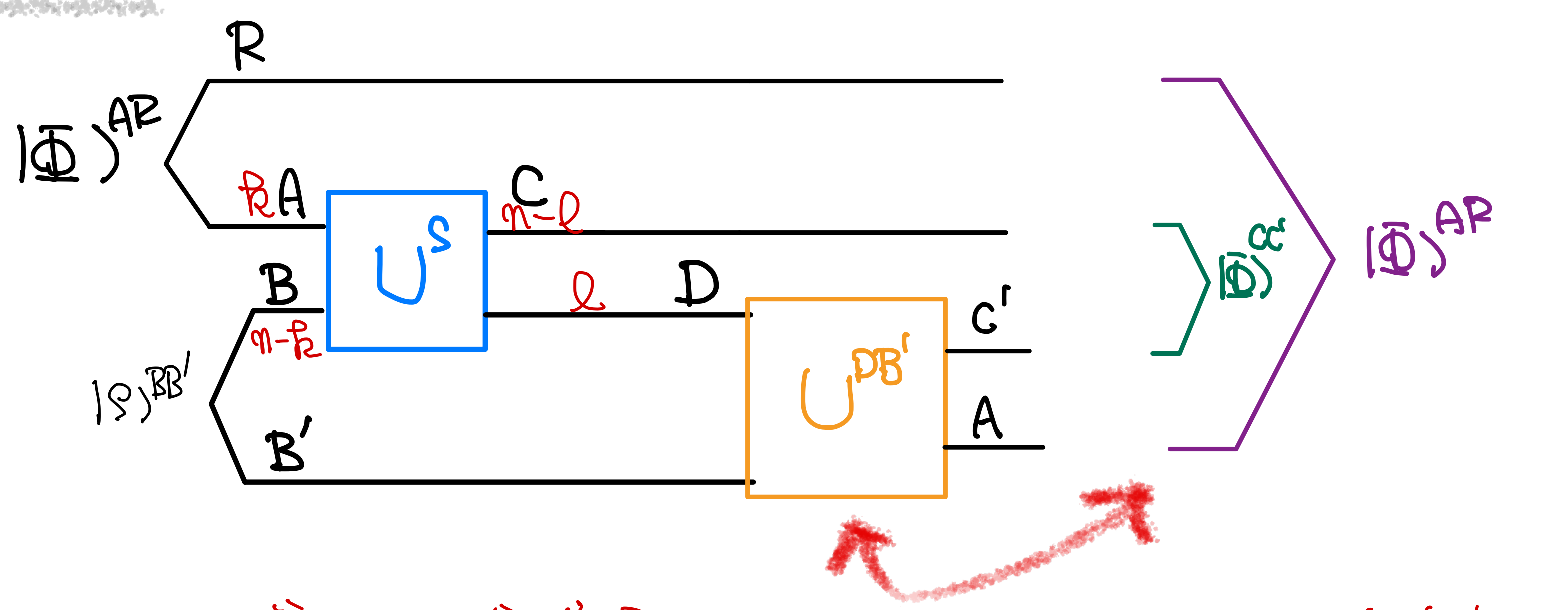


デカップリングでは、"よいデコーダが存在する"ことしか言えない。

(証明を追えば、implicitにデコーダを構成できるが、explicitではない)

- 実際にどうやってデコードすればよい?
- 効率的にデコードできる?
- $\Delta(\rho, U) = \inf_{\mathcal{D}} \Delta(\rho, U, \mathcal{D})$ ではなく、$\Delta(\rho, U, \mathcal{D})$?

一般論



デカップリングが実現していると、こういうユニタリが存在する。

つまり、デカップリングが実現している場合は、

$$\mathcal{H}^{DB'} = \underbrace{\mathcal{H}^{C'}}_{\text{ゴミ}} \otimes \underbrace{\mathcal{H}^{A}}_{\text{この部分空間が、Rと最大エンタングル.}}$$

と分解できる。

（$DB' = C'A$ となるように選ぶ）

デコーダを見つける $\Longleftrightarrow$ よい部分空間 $\mathcal{H}^A \subseteq \mathcal{H}^{DB'}$ をみつける。

Petz 復元写像

状態 σ^A と CPTP写像 $\mathcal{T}^{A\to B}$ に対して、$\sigma_{\mathcal{T}}^B := \mathcal{T}^{A\to B}(\sigma^A)$ とする。

$$\text{Petz 写像}:\quad \mathcal{P}_{\sigma,\mathcal{T}}^{B\to A} := \Gamma_{\sigma^{1/2}}^{A} \circ \mathcal{T}_*^{B\to A} \circ \Gamma_{\sigma_{\mathcal{T}}^{-1/2}}^{B}$$

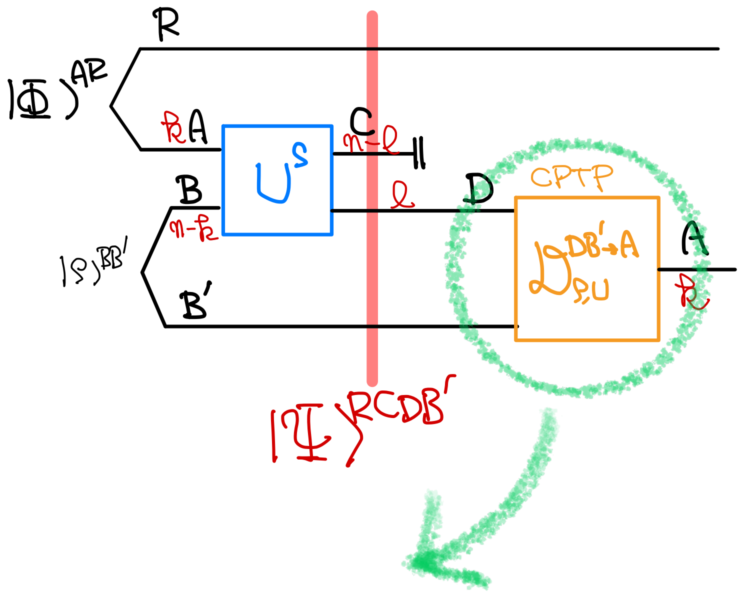
ここで、
$$\begin{cases} \Gamma_\rho(\xi) := \rho\,\xi\,\rho^\dagger \\ \mathcal{T}_*^{B\to A} : \mathcal{T}^{A\to B} \text{ の adjoint map} \end{cases}$$

$$\left(\text{i.e., } \mathrm{Tr}[M^B \mathcal{T}^{A\to B}(N^A)] = \mathrm{Tr}[\mathcal{T}_*^{B\to A}(M^B)\, N^A]\right)$$

定理：Petz をデコーダとして用いると、最適なデコーダ $\mathcal{D}_{\mathrm{opt}}$ に対して、

$$\Delta(\rho, U, \mathcal{D}_{\mathrm{Petz}}) \leq \sqrt{\Delta(\rho, U, \mathcal{D}_{\mathrm{opt}})}$$

[Barnum & Knill, 2002]



復元エラー $\Delta(\rho,U) \leq 2^{I_2}$

$$\mathcal{D}^{DB'\to A}_{\mathrm{petz}}(\xi^{DB'}) := \frac{d_C}{d_A}\langle\rho|^{BB'} U^{S\dagger}\left(\pi^C \otimes (\Psi^{DB'}_{\rho,U})^{-1/2}\,\xi^{DB'}\,(\Psi^{DB'}_{\rho,U})^{-1/2}\right) U^S|\rho\rangle^{BB'}$$

→ Haarランダムを仮定しないときの復元エラー

$$\Delta(\rho,U,\mathcal{D}_{\mathrm{petz}}) \leq 1-2^{I_2(DB':R)-2k}$$

$$\leq 1-2^{I(DB':R)-2k}$$

$$= 1-2^{-I(C:R)}$$

Remark

Petz写像は"謎な"形をしているが、これを実装する量子回路も知られている。

[Gilyén et al PRL 2022]

↪ ゲートの個数 $= O(\exp(n)\exp(\beta))$ なので非効率的.

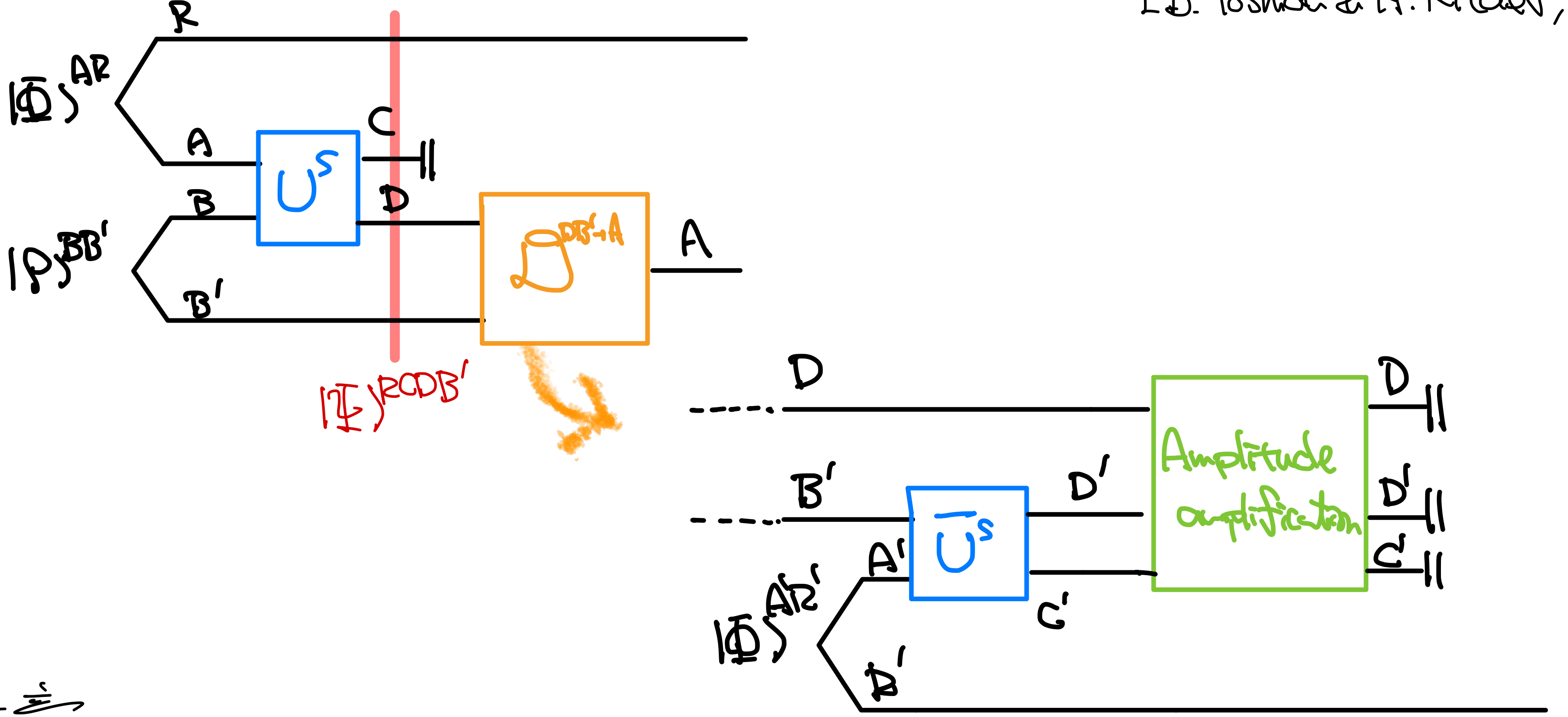
↓

最近、Petz写像をうまく"改良する"ことで少し効率化された。

[T. Utsumi & Nakata, 2024]

Yoshida-Kitaevの方法 ："ノイズ"をsimulateしよう!!

[B. Yoshida & A. Kitaev, 2017]



注意

- $|\rho\rangle^{BB'} = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=1}^{r} |e_j\rangle^B |e_j\rangle^{B'}$ のような形のときにうまく動く。
- HP以外の一般のノイズに対してはうまく動かない。
- 非効率

$$\Delta(|\rho\rangle=|\Phi\rangle, U, \mathcal{D}_{YK}) \leq \left(1-2^{H_2(B'D)_\Psi - H_2(B'DR)_\Psi - R}\right)^{1/2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2^{2R}\,\overline{\langle OTOC\rangle}}\right)^{1/2}$$

[B. Yoshida & N. Yao, PRX, 2018]

ここで、$\overline{\langle OTOC\rangle} = \frac{1}{d_A^2 d_D^2 d_S} \sum_{\substack{P^A, Q^D \\ \text{Pauli}}} \mathrm{Tr}[P^A Q^D_U P^A Q^D_U]$

$0 \leq \overline{\langle OTOC\rangle}$, $\overline{\langle OTOC\rangle} \geq \max\{d_A^{-2}, d_D^{-2}\}$

$Q^D_U = U^S Q^D U^{S\dagger}$

従って、ユニタリU^Sによって、AとDの全てのOTOCが減衰

$\Longrightarrow$ YKの手法で復元可能。

Remark

"YKの手法はHPにしか使えない"

Upgrade!! → うまく改良することで、任意のノイズに拡張可能!!

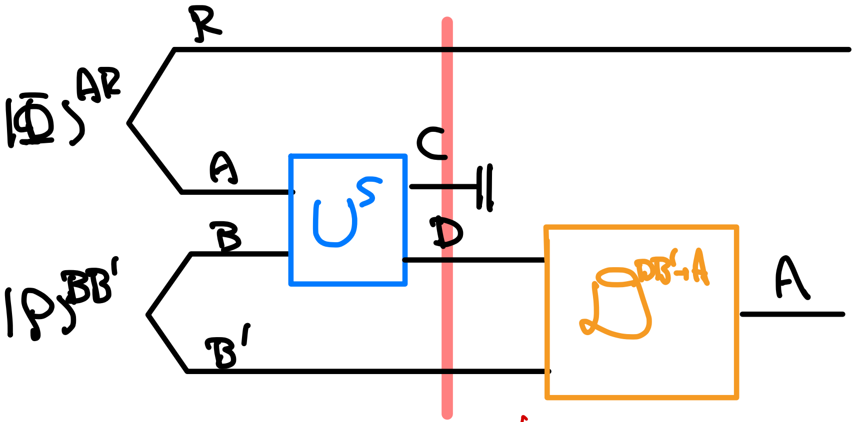
[T. Utsumi & Nakata, 2024]

…… 残念ながら、非効率。

Classical-to-Quantum デコーダ

"直観"に基づいたデコーダ.

[Nakata, Matsuura & Koashi, npj Quantum Info. 2024]



$|\Psi\rangle^{RCDB'}$ ⟵ A が $\{|e_j\rangle\}_j$ なら、DB' でも直交しているはず.

→ 測定すれば識別できる.

実は1つの基底ではなく、
2つ以上の基底でこれをcheckすればよい.

$$|e_j\rangle^A \longmapsto \Psi_{e_j}^{DB'}$$

相補的

$$|f_\alpha\rangle^A \longmapsto \Psi_{f_\alpha}^{DB'}$$

とすると、これらのRenyi-2エントロピーで
復元エラーが決まる。

Remark

- HPだけではなく、任意のノイズに適応可能.
  (near-optimal デコーダ)
- 非効率.

デコーダのまとめ.

1. Petz 写像
2. Yoshida-Kitaev の手法(の拡張)
3. Classical-to-Quantum 復号化.

→ どれも任意のノイズに対して動くが、非効率。

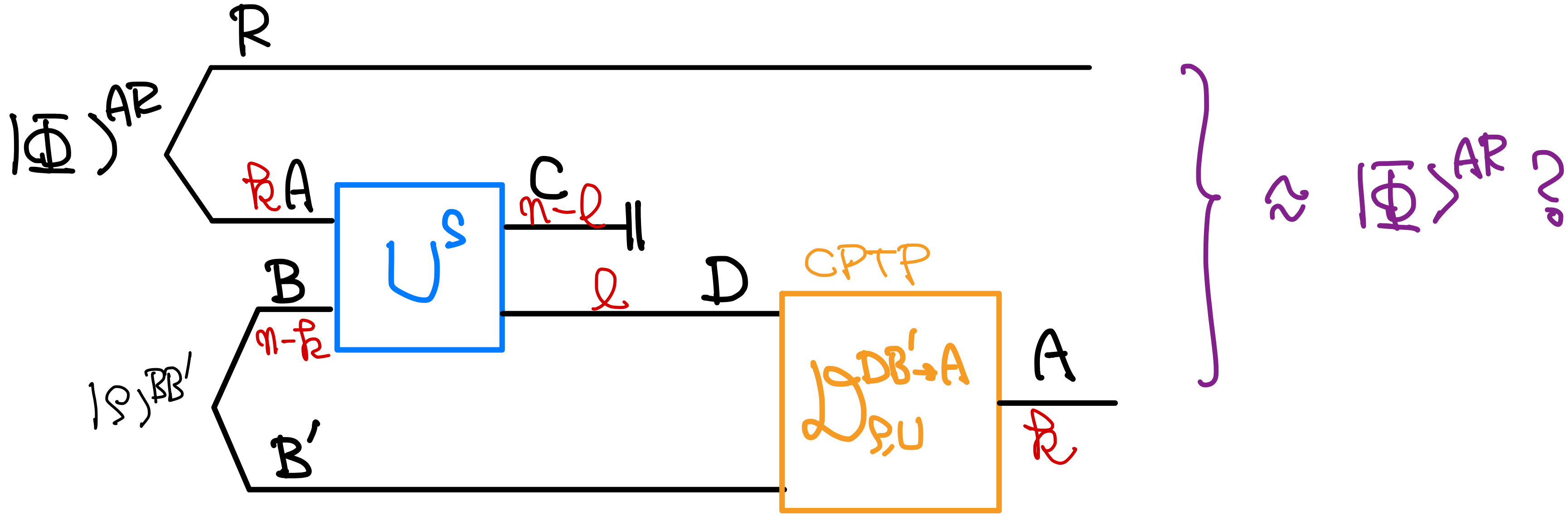
ずっと興味があること. 効率的なデコーダは存在するか?

NOTE: Haarランダムを用いているとムリ ⇒ ユニタリ・デザインで置き換える。

任意のノイズに対して効率的なデコーダは存在しない ⇒ ノイズに何らかの仮定が必要。

5. ハミルトニアン系における Hayden-Preskill

5-1. ハミルトニアン時間発展



U^SがHaarランダムというのは、明らかにやりすぎの仮定。

→ $U^S = e^{-iH^S t}$ のときにどうなるか？

しばしば"Hがカオティックなハミルトニアンであれば、同様の結果が得られるはず"という根拠不明な主張を耳にするが、これは全くの嘘。

反例：

- $H = \sum_j \boldsymbol{S}_j \cdot \boldsymbol{S}_{j+1} + \sum_j h_j Z_j$

ランダム磁場

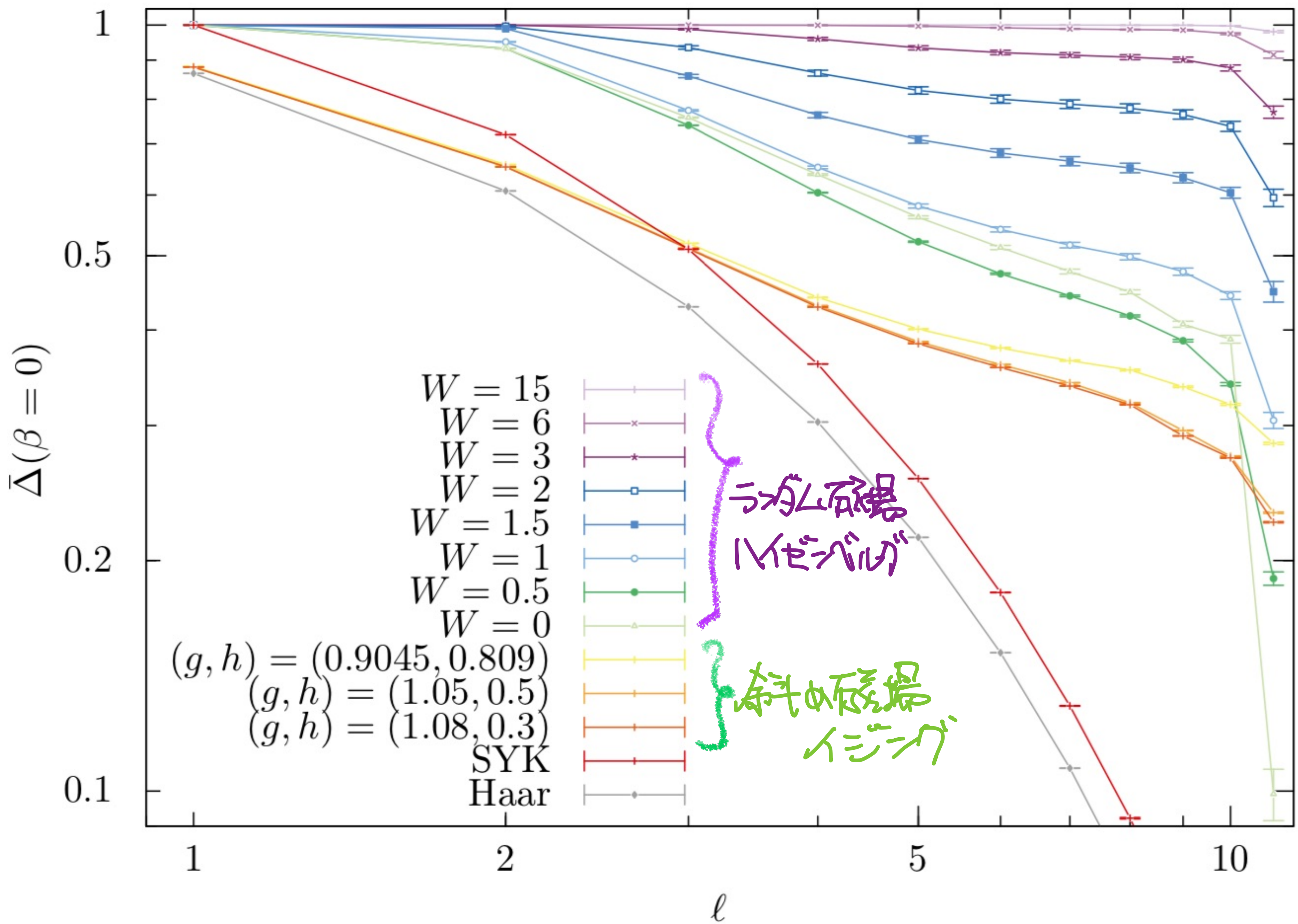
Nakata, Tezuka
PRR 6, L022021
(2024)

- $H = -\sum_j (Z_j Z_{j+1} + g X_j + h Z_j)$

を考えると、数値的に上下が知られている。

1. エネルギースペクトラム $\Rightarrow$ ランダム行列的 $\Rightarrow$ 量子カオス.
2. OTOC は長時間後に最小値に収束する。

しかし、数値計算すると、ダメダメ….



$n=12$, $k=1$ で復元エラー Δ を ℓ の関数としてプロット

⇒「SYK ⇒ HP復元できる」

「この二つの量子カオス・スピン鎖 ⇒ 全然ダメ」

おや？

ユニタリ U^s によって、A と D の全ての OTOC が減衰 ⇒ YK の手法で復元可能.

量子カオス・スピン鎖でも OTOC の減衰が確認されているのに、

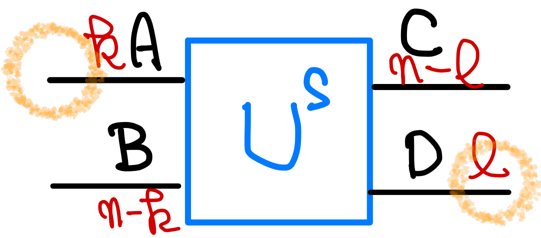
なぜ復元できないのか？

$$\Delta(|\rho\rangle = |\Phi\rangle, U, \mathcal{D}_{YK}) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{2k}\,\overline{\langle OTOC\rangle}}\right)^{1/2}$$

[B. Yoshida & N. Yao, PRX, 2018]

ここで: $$\overline{\langle OTOC\rangle} = \frac{1}{d_A^2 d_D^2 d_S} \sum_{\substack{P^A, Q^D \\ \text{Pauli}}} \mathrm{Tr}\left[P^A Q_U^D P^A Q_U^D\right]$$

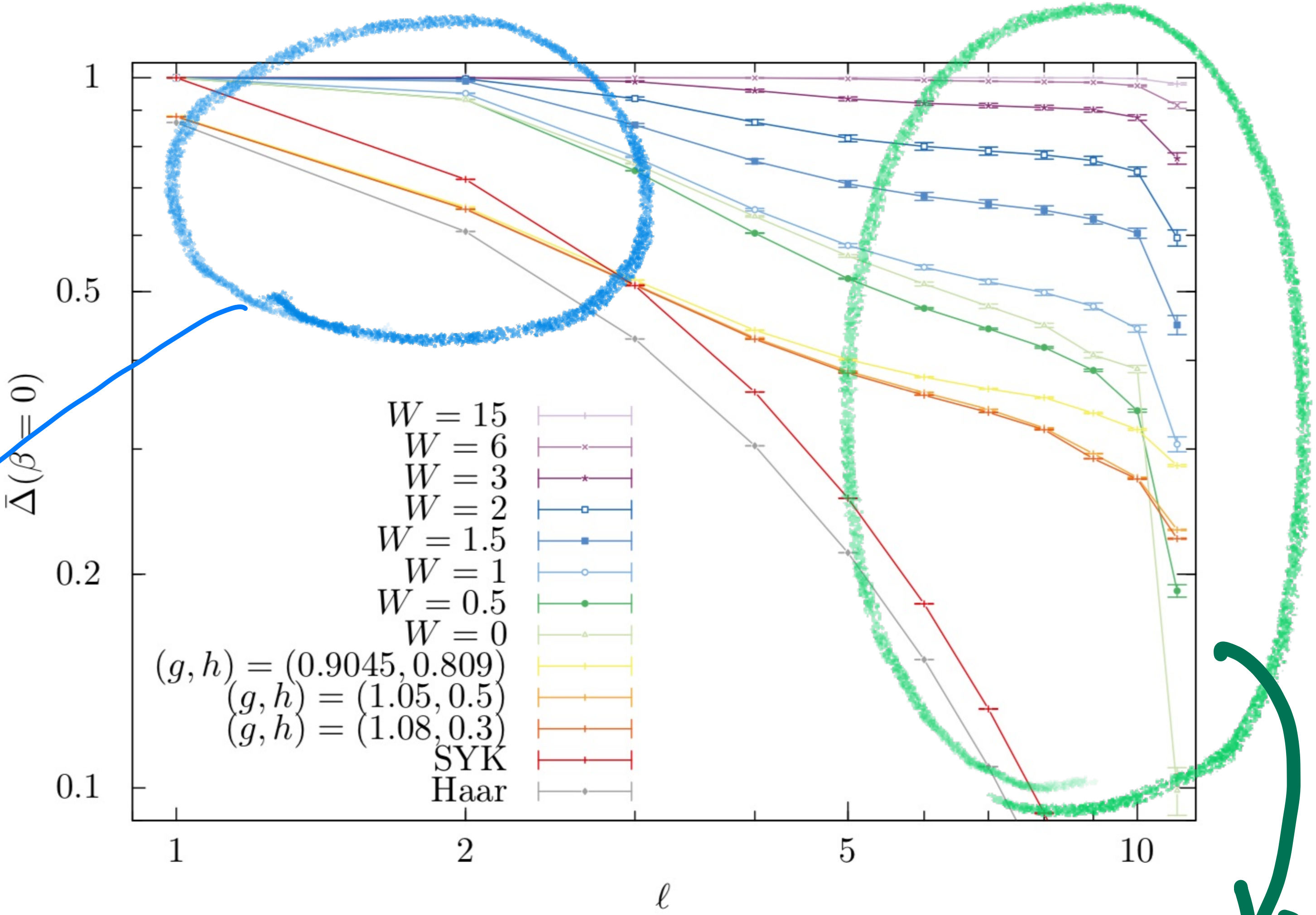
A (k qubits) と D (l qubits) の全てのパウリ.



HPプロトコルでは, lは$0 \nearrow n$の変数。

ところが!! これまでのOTOC研究では, $k=l=1$が多い.

↪ このような局所OTOCではHPは理解できない.



局所OTOCで理解可能。
(よく研究されてる)

大局的OTOCと関連してる。

つまり、SYKと量子カオス・スピン鎖は、異なる

大局的OTOCを持つ。

最近、興味があること。

- どういうハミルトニアンであれば、HP復元を実現できる?
- ハミルトニアン時間発展を用いた量子誤り訂正?